# RACIOCINAR EM GEOMETRIA: O PAPEL DAS TAREFAS

Teresa Pimentel

*Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo*

terpimentel@gmail.com

Isabel Vale

*ESE do Instituto Politécnico de Viana do Castelo*

isabel.vale@ese.ipvc.pt

## Resumo

Este artigo relata uma experiência de sala de aula realizada com alunos do ensino secundário que pretende compreender os processos de raciocínio em geometria utilizados pelos alunos enquanto resolvem tarefas desafiantes. Apresentam-se alguns relatos de sala de aula ocorridos numa turma de 11º ano mostrando os caminhos escolhidos por estes alunos para a realização de uma dessas tarefas, que envolve a utilização de um ambiente de geometria dinâmica (AGD). Os processos de raciocínio utilizados, incluindo estratégias de resolução de problemas, estabelecimento de conjeturas, explicação e prova são realçados e discutidos.

**Palavras-chave:** Raciocínio em geometria, estratégias de resolução de problemas, conjetura, prova, ambiente de geometria dinâmica.

## Introdução

Esta apresentação insere-se numa experiência de ensino de natureza exploratória (Ponte, 2005) visando compreender os processos de raciocínio utilizados por alunos do ensino secundário enquanto resolvem tarefas desafiantes, assim como identificar potencialidades das tarefas que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio. As tarefas envolvem conceitos geométricos básicos, e pretende-se que o ponto de partida da sua exploração seja a intuição e a visualização, mas que abram caminho para a explicação e a prova.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Secundário (ME-DES, 2001) reconhece-se que o desenvolvimento do raciocínio é essencial para o sucesso dos alunos na escola e na sua vida futura, e deste modo os processos de raciocínio usados pelos estudantes na atividade matemática são de particular importância para o professor, uma vez que o seu conhecimento pode proporcionar meios mais eficazes de organização do ensino. Uma visão da matemática como raciocínio opõe-se a outra visão da matemática como uma atividade orientada por regras (Yackel & Hanna, 2003). A atividade matemática escolar fica assim dependente de qual destas visões predomina na sala de aula. De acordo com estas autoras, a ênfase no raciocínio pressupõe um tipo de compreensão relacional, em oposição a uma compreensão instrumental. Neste último modelo as explicações e justificações são redundantes, já que os alunos se limitam a seguir instruções com regras fixas. Pelo contrário, a primeira exige dos alunos que descrevam a sua atividade de modo que os colegas possam reconhecer que é legítima, o que pressupõe explicação e justificação. Este modelo é mais abrangente porque permite o desenvolvimento de múltiplos modos de navegar entre tópicos matemáticos.

Assumindo que há espaço e necessidade de compreensão instrumental da matemática em muitos contextos de ensino e aprendizagem, defende-se contudo a importância da mobilização de conhecimentos prévios e do estabelecimento de relações que permite uma compreensão mais profunda. Um meio de atingir esse objetivo é apresentar aos alunos questões para as quais possam desenvolver resoluções pessoais e significativas sem a orientação direta do professor, procurando estimular o estabelecimento de conexões e a reflexão. Seguiu-se assim esta metodologia nas aulas inseridas nesta experiência, favorecendo o aparecimento de várias resoluções diferentes da mesma tarefa. O facto de a resolução de cada aluno poder ser diferente das escolhidas pelos seus colegas induz a necessidade de procurar uma explicação que convença os seus pares bem como uma justificação que legitime as suas ações. Neste sentido, a atividade matemática que será descrita está intimamente relacionada com o processo de raciocínio matemático. Neste trabalho, o AGD utilizado pelos alunos – a sua utilização era opcional mas todos recorreram a ele - surgiu como uma mais-valia. Deve referir-se a sua importância na elaboração e teste de conjeturas que constituem uma parte fundamental do raciocínio indutivo (NCTM, 2000).

Nesta configuração, a principal questão que pretendíamos explorar era: As tarefas utilizadas são adequadas para estimular o raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo dos alunos, designadamente apelando à sua intuição geométrica e à necessidade de prova?

Apresentam-se relatos de sala de aula e alguns resultados da realização de uma tarefa.

## Tipos de Raciocínio Matemático

Descrevem-se sumariamente os principais tipos de raciocínio considerados, procurando o estabelecimento de pontes com a visualização e a intuição.

### Raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo

Consideram-se habitualmente dois tipos fundamentais de raciocínio: raciocínio indutivo e raciocínio dedutivo (Pimentel & Vale, 2012). O primeiro parte do particular para o geral, da observação de dados sobre os quais se formulam hipóteses exploratórias, e, com base em experiências em vários outros casos, generaliza para um conjunto mais vasto. O segundo surge da necessidade de verificar a validade dessa generalização, e baseia-se em argumentos lógicos do tipo *modus ponens*. Esta necessidade de verificação é uma caraterística própria da matemática enquanto ciência. Pode mesmo afirmar-se que a matemática se consubstancia nesta necessidade de prova (Davis & Hersch, 1995).

Contudo, vários autores (e.g. Radford, 2008), com base no trabalho de Peirce, estabelecem outro tipo de raciocínio: o raciocínio abdutivo. De acordo com a Stanford Encyclopedia of Philosophy (2010), Peirce apresenta a abdução como uma fase criativa, de produção de hipóteses exploratórias, tornando-se assim evidente como as ideias aparecem inicialmente na mente. O autor acredita que, embora este seja o modo de inferência menos seguro, é necessário por uma questão de economia de tempo da investigação, e o seu sucesso está condicionado pela intuição e pelo conhecimento prévio. Neste estádio pode predizer-se uma conclusão de uma forma necessariamente incompleta, ainda sem dedução, mas, por outro lado, é impossível validar dedutivamente um resultado sem uma conjetura prévia. A formalização só pode constituir o último passo. Polya (1954) chama raciocínio plausível ao estádio inicial de criação, defendendo que, antes de atingir a certeza absoluta, terá de ser feita uma conjetura plausível. Rivera e Becker (2007) defendem que, enquanto a abdução consiste em escolher uma hipótese, a indução envolve a sua testagem. A abdução é o processo de introdução de uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde ao passo seguinte, o teste da conjetura em mais dados. Para estes autores, o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução. Só o fim deste ciclo dá lugar à dedução, que envolve explicação, argumentação e prova.

Estes estádios estão de igual modo estabelecidos na definição de raciocínio de Lannin, Ellis e Elliot (2011): "o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10). Estes autores estabelecem um modelo do processo de raciocínio matemático que relaciona de forma interativa a conjetura e generalização, a compreensão do "porquê" e a justificação ou refutação. Cada um destes aspetos é dividido em compreensões essenciais que o aluno deve possuir por forma a poder exercer o raciocínio nas diversas etapas. Conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com vista a estabelecer afirmações que se procura que sejam verdadeiras embora não se saiba; generalizar envolve a busca de aspetos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial. Na compreensão do porquê o raciocínio leva à pesquisa de vários fatores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. A justificação é um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas. Uma refutação envolve demonstrar a falsidade de um caso particular. A justificação e a refutação incluem a avaliação da validade dos argumentos. Uma justificação válida de uma afirmação geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplos. Assim, pode estabelecer-se um paralelo com os tipos de raciocínio anteriormente apresentados. A conjetura e generalização encaixam no raciocínio abdutivo e indutivo; a justificação ou refutação relacionam-se com o raciocínio dedutivo; e a compreensão do porquê é um processo que permeia ambos, permitindo quer refutar conjeturas e reiniciar o ciclo abdutivo com nova ideia, quer confirmar a plausibilidade de generalização feita de modo a poder avançar para o processo dedutivo de justificação.

## O papel da visualização e da intuição e as suas relações com a prova

Para Zimmerman e Cunningham (1991), a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. De acordo com Arcavi (2003), a visualização é central para aprender e fazer matemática, não só pelo seu papel ilustrativo mas também como uma componente-chave da resolução de problemas e do raciocínio, incluindo neste a prova.

O raciocínio espacial é o processo de formar ideias através de relações espaciais entre objetos (Jones, 2001). De entre as várias formas de atividade mental, é esta que torna possível a criação de imagens espaciais e a sua manipulação no decurso da resolução de problemas práticos e teóricos. É largamente reconhecido o importante papel do raciocínio espacial em matemática, particularmente em geometria, e, deste modo, é necessário reforçar o ensino e a aprendizagem da matemática através da via da construção da intuição e perceção espacial dos alunos (Jones, 2010). O pensamento intuitivo, baseado na visualização e conduzindo à descoberta, é uma caraterística a desenvolver nos estudantes por proporcionar o desenvolvimento de processos de raciocínio abdutivo através da introdução de novas ideias e formulação de conjeturas.

Atyiah (2001) defende que a intuição é a nossa arma mais poderosa. As tarefas de índole investigativa ou exploratória, em geometria, por exigirem o contacto prévio com uma ou mais ideias geométricas que podem surgir de forma intuitiva mas que os alunos são instados a aprofundar para poderem prosseguir no sentido da formulação e verificação de conjeturas, proporcionam aos alunos a oportunidade de descrever caraterísticas e relações entre objetos geométricos, de modo a fazer inferências e assim usar e desenvolver o raciocínio espacial.

Os alunos não podem resolver problemas geométricos se não tiverem criado imagens geométricas (Fujita & Jones, 2002). Os autores usam o termo cunhado por Godfrey (1910), *olho geométrico* – o poder de ver propriedades geométricas a destacar-se de uma figura -, como uma ferramenta poderosa para a construção da intuição geométrica. Este poder é desenvolvido com a realização de tarefas práticas tais como desenhar e fazer medições em figuras geométricas.

No entanto, se é certo o papel crucial da intuição, as interações entre a atividade matemática formal e intuitiva, fundamentais para o raciocínio geométrico, são complexas e difíceis de identificar. Quando é que cada uma começa ou acaba? Fujita e Jones (2002) defendem que o ensino da geometria pode ser aperfeiçoado se se estabelecer uma ligação mais direta entre intuição e teoria. Isto é, a abordagem dedutiva e intuitiva devem reforçar-se mutuamente durante a resolução de problemas matemáticos. Na mesma linha, Ball, Hoyles, Jahnke e Movshovitz-Hadar (2002) argumentam que a prova deveria ser parte do processo de resolução de problemas, ou seja, os problemas deveriam incluir como última fase a prova das conjeturas feitas. Deste modo podem preparar-se os estudantes para relacionar ideias, esboçar e transformar diagramas, permutar entre diferentes representações, conduzir experiências e combinar a experiência com a dedução.

No âmbito da geometria, a visualização tem tido sempre um papel importante no processo de raciocínio matemático. De facto, usualmente os problemas geométricos apresentam no enunciado, ou então requerem, o uso de desenhos ou diagramas para uma melhor compreensão inicial e posterior estabelecimento de inferências. No entanto, hoje em dia, o uso intensivo de computadores permite melhorar a abordagem clássica com gráficos estáticos, facultando o uso de estruturas dinâmicas com animação. Esta nova funcionalidade abre um mundo de possibilidades à abordagem dos problemas geométricos. A utilização de um AGD fornece às figuras uma lógica de condicionalidade, como resultado da sua construção numa hierarquia de relações (Arzarello, Bartolini Bussi, Leung, Mariotti & Stevenson, 2012). Este aspeto é evidente no modo *arrastar*, com o qual podemos ver se uma solução é válida: se e só se a figura no visor permanecer estável com o teste de *arrastar*. Em ambientes de geometria dinâmica as abduções – hipóteses exploratórias iniciais – podem ser testadas rapidamente em muitos dados, percorrendo assim duma forma eficaz a fase indutiva, deixando o caminho mais livre para o último passo: a fase dedutiva. Na verdade, embora passar o teste de *arrastar* possa ser suficiente para os alunos, é necessário convencê-los da importância de justificar a solução de modo a explicar aos outros porque é que ela funciona. Deste modo, a justificação tem a sua razão de ser como parte duma interação social.

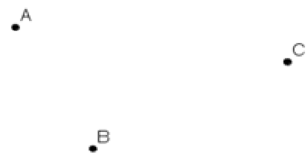
## Metodologia

Adotou-se uma abordagem exploratória de índole qualitativa através de uma experiência de ensino envolvendo os alunos na exploração e resolução de tarefas matemáticas desafiantes, das quais se relata uma. Os participantes eram 25 alunos de uma turma do 11º ano de uma escola pública. No momento da experiência, estavam a aprender geometria analítica no plano e no espaço, lidando com propriedades elementares de figuras planas e sólidas. Os dados foram analisados de um modo descritivo e interpretativo, incluindo observação e fotografia do trabalho dos alunos, notas pela professora acerca da aula e análise dos relatórios de atividade realizados pelos alunos na aula. A professora é a primeira autora deste texto.

A tarefa, apresentada na Figura 1, resultou da adaptação e simplificação para um triângulo de um problema idêntico, mas aplicado a um pentágono, descrito em Bernardes et al. (2004).

INVESTIGAÇÃO – PONTOS MÉDIOS

| Organização | Material necessário |
|---|---|
| Trabalho em pares. | Material de desenho. Geogebra (optional). |




São dados três pontos não colineares A, B e C.

Estes são os pontos médios dos lados de um triângulo desconhecido [PQR].

Reconstrói o triângulo inicial.

Elabora um relatório onde registes

- Dificuldades sentidas
- Processo desenvolvido (todas as tentativas e experiências realizadas; as conclusões a que chegaste, justificando-as).

Figura 1. Tarefa apresentada aos alunos

Os alunos trabalharam em pares (e um trio) e tinham um computador disponível para cada par. Não foi dada orientação direta para a resolução por parte da professora, que circulou pela turma observando o trabalho dos alunos e por vezes colocando questões de modo a compreender ou esclarecer para si própria o pensamento dos alunos. A tarefa desenrolou-se em duas aulas. A primeira aula durou 90 minutos, no final da qual os alunos elaboraram um relatório escrito do seu trabalho, alguns utilizando o computador e outros à mão, conforme sua escolha. Alguns dias depois a aula foi complementada com outra, em que nos primeiros 30 minutos os alunos tiveram a oportunidade de melhorar o seu relatório, depois de alguns comentários da professora acerca da necessidade de explicação e justificação completa das ações descritas. Depois deste trabalho, houve um tempo para discussão das resoluções e síntese dos aspetos mais relevantes, designadamente a escolha das melhores provas matemáticas e porquê.

Embora o uso do Geogebra fosse opcional, todos os pares recorreram ao *software*. A turma já estava familiarizada com esta aplicação desde o ano anterior. Também já tinha realizado por diversas vezes tarefas de índole exploratória e relatórios escritos de atividade.

## Resultados e Discussão

Apresentam-se em seguida alguns relatos significativos de sala de aula que podem iluminar o raciocínio dos alunos enquanto trabalhavam na tarefa e faziam o relatório escrito. Estes relatos resultam da observação, complementada com notas da professora imediatamente a seguir à aula, e dos relatórios escritos realizados por cada par de alunos.

***Relato 1***

O par (J-F) optou por uma estratégia de tentativa e erro. Utilizaram um processo muito elementar, como se estivessem a usar material manipulável, o que lhes deu segurança na abordagem do problema. Este procedimento foi possível tirando partido das capacidades dinâmicas do Geogebra (Figura 2):

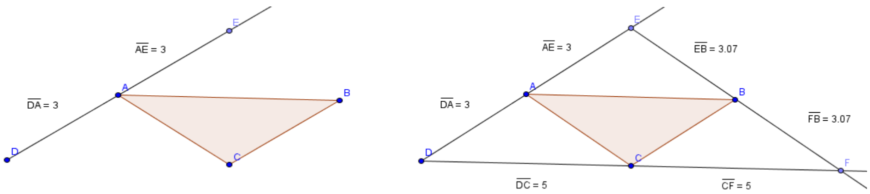



Figura 2. Início e fim do processo

> *Traçamos uma reta que unia um ponto D ao ponto A, e sabendo essa distância marcamos um ponto E inserido na reta DA que estava à mesma distância de A que o ponto D. […] Manobrando o ponto B, fizemos com que este se enquadrasse como ponto médio da reta EF*[1].

Então prosseguiram até que o triângulo estivesse inteiramente construído, mas não justificaram o procedimento. Estes dois alunos costumam ser extremamente sucintos nas respostas que dão e relutantes em dar explicações, embora instados a isso, considerando que não é necessário. No entanto, na aula seguinte, o par acrescentou um 5º passo ao seu relatório, onde registou:

> *AB||DF, CB||AE e AC||EB por causa da semelhança dos triângulos EDF e EAB: têm um ângulo congruente, E, e lados proporcionais. Logo, os lados são paralelos.*

***Relato 2***

O par (A-H) trabalhou ao contrário sem se aperceber, por má interpretação: marcaram primeiro o triângulo PQR, os pontos médios dos lados e construíram o triângulo ABC. Tiveram consciência disso depois, quando se aperceberam que a construção não passou o teste "*arrastar*": assim não podiam mexer os pontos A, B e C marcados à partida, ou seja, estes não eram livres.

> *Numa primeira tentativa desenhamos o triângulo [PQR], e a partir desse mesmo triângulo descobrimos os pontos médios A, B e C. Mas não era isso o pretendido, porque fizemos o processo ao contrário. Através do geogebra só conseguimos mudar de posição o triângulo [PQR] e não os pontos A, B e C.*

---

[1] As frases em itálico são citações dos relatórios.

Contudo, o par (R-S) trabalhou do fim para o princípio sabendo o que estava a fazer: foi para detetar alguma coisa que lhes permitisse concluir sobre a relação entre os dois triângulos. E viram: cada lado do triângulo original poderia obter-se traçando uma paralela a cada lado do triângulo dos pontos médios passando pelo vértice oposto. Usaram assim este método de trabalhar do fim para o princípio como uma estratégia poderosa de resolução de problemas que lhes permitiu descobrir o procedimento a adotar para o problema dado. E depois trataram de justificar o procedimento, explicando porque é que ele funciona. Para isso usaram conhecimentos sobre triângulos semelhantes.

> *Construímos em primeiro lugar o triângulo que queríamos achar, com pontos genéricos. De seguida, ainda no geogebra, achamos os pontos médios do triângulo, e com estes três pontos achamos o triângulo de dentro, ou seja, tentamos resolver o problema por uma possível solução. Ao termos estes triângulos desenhados reparamos que o triângulo DEF é congruente com mais três triângulos e estes juntos formavam o triângulo ABC. Por isso preferimos analisar o triângulo ADE. Este é semelhante ao triângulo ABC porque os dois possuem o mesmo ângulo em A, e os lados são proporcionais visto que estamos a falar de pontos médios, e portanto concluímos que a reta DF é paralela a EC. Assim ficamos a descobrir que o processo de construção estava certo.*

***Relato 3***

No trio P-M-U, P teve a intuição de que era preciso traçar uma paralela a cada lado pelo vértice oposto, mas sem ter disso consciência. A Figura 3 e o seguinte diálogo com a professora são evidência deste ponto:

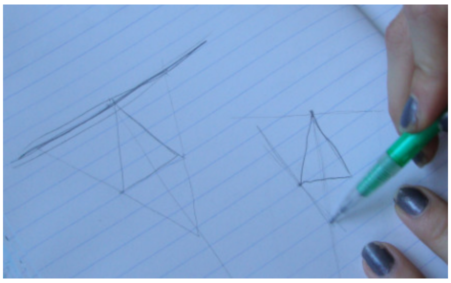


Figura 3. Intuição de P acerca do traçado de paralelas

P desenhou no seu caderno o triângulo ABC com um lado horizontal e afirmou:

> P: Traçamos aqui (apontando o 3º vértice) uma reta horizontal.
> Professora: Horizontal? E se o triângulo fosse este? (e desenhou outro triângulo sem lados horizontais).
> P traçou uma paralela ao lado pelo 3º vértice sem usar palavras.
> Professora: Então como traçaste a reta?
> P: Uh ... não sei… ah, paralela, claro!

Este trio, para provar que o seu processo, obtido intuitivamente, estava correto, mediu as distâncias de cada um dos pontos A, B, C aos novos pontos encontrados, confirmando que aqueles eram de facto os pontos médios.

> *Com isto, construímos o triângulo pretendido, no qual, para verificar a veracidade da nossa conclusão, medimos a distância dos pontos médios aos pontos extremos do triângulo, tendo as medidas coincidido.*

Os alunos não se aperceberam que este método verifica para o triângulo desenhado mas não constitui uma prova matemática porque não prova para todos os triângulos. Esta questão foi-lhes explicada pela professora na aula seguinte e o grupo produziu então o seguinte argumento:

> *O triângulo formado pelos vértices dados A, B e C tem área ¼ do original. Concluímos então que o triângulo dos pontos médios é uma redução do original, sendo estes triângulos semelhantes. Este critério aplica-se a qualquer triângulo, porque envolve semelhança de triângulos, que é uma teoria matemática na matéria das figuras geométricas.*

***Relato 4***

O par C-L desenhou à partida um triângulo equilátero que conduziu ao procedimento evidenciado na Figura 4.

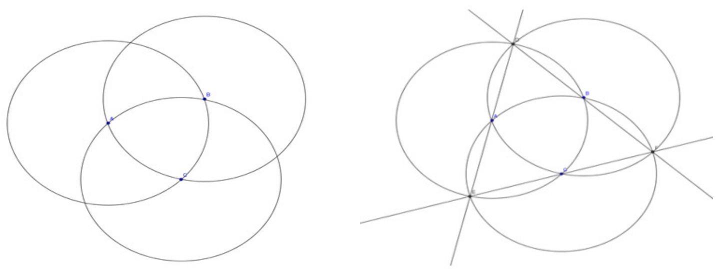


Figura 4. Abordagem do par C-L

No entanto, aperceberam-se que este procedimento não se adapta a um triângulo qualquer, e expressaram-no no relatório:

> *É de notar que neste exemplo especifico foi possivel traçar as circunferências desta maneira. Se os pontos estivessem dispostos de outro modo poderia já não ser possivel desenhar as circunferências e consequentemente, o triângulo.*

A tendência para desenharem triângulos equiláteros mesmo quando se fala de um triângulo qualquer conduz a uma visão limitada do problema. Quando os alunos tomaram consciência desse facto poderiam ter tentado outra abordagem, mas na realidade tal não aconteceu.

***Relato 5***

O par D-N encarou o problema doutro modo. Construíram o triângulo DEF, os pontos médios dos seus lados, e o transformado por simetria central de cada vértice relativamente ao ponto médio do lado oposto (Figura 5).

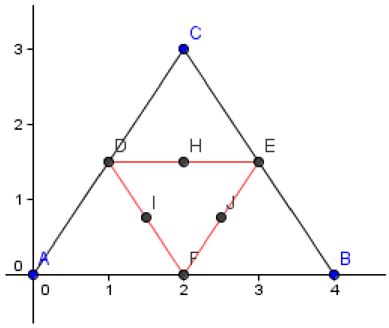



Figura 5. Abordagem do par D-N

> *Num triângulo, fazendo a reflexão de cada vértice no ponto médio do triângulo inicial, obtemos um vértice do triângulo ABC; porque a distância que existe (por exemplo) entre DJ é igual à distância que existe entre JB. […] Para comprovarmos a nossa teoria, verificamos fazendo a reflexão dos pontos médios pelo segmento de reta oposto do triângulo formado pelos pontos médios. Os pontos originados coincidiam com os pontos Q, P e R.*

Infelizmente não justificaram completamente este procedimento, sobretudo por se ter estabelecido alguma confusão com tantos pontos médios e entre simetria central e axial, e mudaram para o processo mais comum do traçado de paralelas.

***Relato 6***

Este relato é aqui incluído essencialmente para evidenciar o papel da visualização no ataque ao problema. O par M-I que expressa no início do relatório a importância de um modo particular de ver o problema quando se lembraram de unir os pontos dados:

> *Ao princípio sentiram-se algumas dificuldades a iniciar uma resolução por não se saber como começar. Começou-se por esboçar o triângulo original mas sem sucesso pois não se sabia quais eram as inclinações dos lados do triângulo. Posteriormente, com os três pontos A,B,C que são dados, desenhou-se um triângulo [ABC]. Este seria o primeiro passo para a resolução que se elaborou.*

Estas alunas prosseguem a sua resolução com base na semelhança de triângulos.

**Síntese**

Como estes relatos evidenciam, foram usadas várias estratégias úteis de resolução de problemas, tais como desenhar uma figura, usar tentativa e erro ou trabalhar do fim para o princípio.

A visualização permitiu em todas as circunstâncias atacar o problema. Quase todos os alunos uniram os pontos dados inicialmente, o que parece óbvio mas de facto não é. Só o par M-I, descrito no relato 6, se apercebeu da importância de fazer tal construção, por não lhes ter surgido essa ideia de imediato, como depois explicaram. Na verdade, a visualização dos segmentos que constituem os lados do triângulo dos pontos médios é que permitiu raciocinar sobre as relações espaciais entre estes e os lados do triângulo inicial e fazer inferências produtivas no sentido da resolução.

A intuição também teve um papel preponderante no processo. De facto, a maioria dos grupos, ao desenhar pelo ponto A (e B e C) um segmento do qual A fosse o ponto médio, ignorando a direção desse segmento entre uma imensa variedade de hipóteses, tiveram a intuição de que este segmento deveria ter a mesma direção que o segmento [BC], e como tal tiraram uma paralela. Cerca de 40% dos alunos ficaram por aqui. Outros quiseram confirmar que, com esta construção, tinham obtido três segmentos dos quais A, B e C eram realmente os pontos médios, medindo, e confirmando assim que o processo de construção, obtido intuitivamente, estava correto. Outros ainda quiseram ir mais longe, citando a semelhança de triângulos obtida por efeito do paralelismo, ou, trabalhando do fim para o princípio, provando que eram realmente paralelas.

Embora a maioria dos alunos tivesse abordado o problema através do paralelismo, congruência e semelhança de triângulos, surgiram outros processos de resolução: um deles consistiu em desenhar circunferências centradas nos pontos dados, num procedimento apenas adequado para triângulos equiláteros. Isto pode ter acontecido devido à tendência para desenhar um triângulo equilátero mesmo quando é dado um triângulo qualquer. Outro processo consistiu em determinar o transformado por simetria central de cada ponto inicial relativamente ao ponto médio do lado oposto.

A geometria analítica foi usada por vários grupos, ao marcarem pontos com coordenadas precisas e registar os dados para medir distâncias, mas isto foi devido ao facto de o Geogebra apresentar o referencial. A medição é uma ação concreta que dá segurança aos alunos fazendo-os sentir mais confortáveis na abordagem. Este facto foi útil para alguns pares se convencerem da correção da sua construção. Por exemplo, um par refere no relatório: *Nós medimos o perímetro e a área de ambos os triângulos. O maior tinha o perímetro duplo e a área quádrupla do outro, por isso são semelhantes.*

Ninguém usou vetores, embora já tivessem trabalhado com essa ferramenta no ano em curso. Aparentemente, quando não têm orientação da parte do professor, os alunos recorrem mais frequentemente a ferramentas matemáticas com que estão mais familiarizados. É o caso, nesta tarefa, da semelhança de triângulos.

A aula complementar, na qual a professora pediu aos alunos para melhorar ou completar o seu trabalho, fez com que mais alguns estudantes sentissem a necessidade de justificar com argumentos genéricos os seus procedimentos, baseados em propriedades matemáticas conhecidas, de modo a poderem constituir uma conclusão válida para qualquer triângulo.

## A Concluir

A tarefa descrita envolvia essencialmente uma abordagem construtiva, ou seja, os alunos tinham de criar um método de construção, e não apenas interpretar ou analisar afirmações dadas e tirar conclusões. Esta caraterística proporcionou uma maior motivação para o trabalho. Os alunos começaram por fazer experiências, evoluíram para a análise de exemplos e a elaboração e teste de conjeturas. Neste percurso a visualização permitiu o desenvolvimento da intuição geométrica, o acima citado *olho geométrico* (Fujita & Jones, 2002). Na verdade, a experimentação e as tentativas de construção observadas, quer em papel quer com o AGD, permitiram uma perceção intuitiva das ideias matemáticas em jogo. Por exemplo, praticamente todos os alunos tiveram a intuição de que era necessário tirar por um ponto uma paralela ao segmento formado pelos outros dois pontos. Quase ao mesmo tempo, incorporaram o uso de argumentos construídos sobre propriedades geométricas conhecidas, de modo a explicar e justificar as suas ações e resultados, ou refutá-los. Foram detetadas caraterísticas do raciocínio estabelecidas por Lannin et al. (2011) designadamente no desenvolvimento de construções das quais os alunos têm a convicção de que são verdadeiras mas podem não ser, explicando porque é que são verdadeiras ou refutando-as se o teste em mais dados falhar, e construindo uma justificação válida para uma afirmação geral.

Um importante fio condutor desta experiência diz respeito ao uso de AGD: este proporcionou uma base concreta para a abordagem do problema e facilitou o teste de conjeturas em muitos tipos de triângulos com o modo *arrastar*. Esta caraterística permitiu também a refutação de construções e aumentou a confiança no estabelecimento de conjeturas em geometria, mas não necessariamente no sentimento da necessidade de uma prova válida, ou na capacidade para produzir alguma. De facto, cerca de 40% dos alunos não forneceram prova formal, embora tenham sido instados a fazê-lo.

A tarefa, proporcionando uma abordagem mista experimental e dedutiva à resolução de problemas (Fujita & Jones, 2002; Ball et al., 2002), revelou ter potencial para desenvolver o raciocínio matemático em todas as suas caraterísticas. De facto, o ataque inicial do problema apoiou-se na visualização e na intuição, e na realização de várias experiências, o que permitiu o estabelecimento de hipóteses iniciais ou conjeturas, evidenciando o raciocínio abdutivo. As caraterísticas dinâmicas do AGD permitiram testar a conjetura feita em muitos tipos de triângulo de modo rápido, aceitando-a ou refutando-a, colocando em realce o raciocínio indutivo. Finalmente, atingida uma forma geral plausível, a maioria dos alunos procurou explicar, justificar e, em vários casos, provar porque funcionava, utilizando assim o raciocínio dedutivo.

## Referências


Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215–241.

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M. & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. In G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15* (pp. 97-137). Springer.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century, *American Mathematical Monthly,* 108(7), 654-666.

Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof.* Paper presented at the International Congress of Mathematicians, Beijing, China.

Bernardes, A., Loureiro, C., Veloso, E., Costa, F., Viana, J. P., Dedó, M. & Bastos, R. (2004). Cinco puntos, un problema e cinco resoluciones. In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (coords.), *La actividad matemática en el aula – Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 79-90). Barcelona: Graó.

Davis, P. & Hersch, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Fujita, T. & Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.384-391). University of East Anglia, Norwich, UK.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. *Teaching and learning geometry 11-19*, 55-56. London, UK: Royal Society.

Jones, K. (2010). Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. In Z. Usiskin, K. Andersen & N. Zotto (Eds.), *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry* (pp. 203-215). Charlotte, NC: Infoage.

Lannin, J., Ellis, A. & Elliot, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten - Grade 8*. Reston, VA : NCTM.

ME-DES (2001). *Programa de Matemática A*. Acedido em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s em 1 de março de 2013.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Vol.2: Patterns of plausible inference.* New Jersey: Princeton University Press.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, Vol. XXI, Nº 2,* 29 – 50.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83–96.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 140-155.

Stanford Encyclopedia of Philosophy (2010). *Charles Sanders Peirce* (Rev. Ed.). Retrieved march, 7, 2012 in http://plato.stanford.edu/entries/peirce/

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualisation in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.