O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO NO TÓPICO TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Alexandra Pinheiro

pinheiro.alexandra@gmail.com

Susana Carreira

FCT da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

Resumo

Nesta comunicação pretende-se discutir o trabalho desenvolvido no âmbito de uma investigação com foco no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Para melhor concretizar o objeto de estudo identificam-se os seguintes objetivos: (i) analisar o contributo do Geogebra como ferramenta no desenvolvimento da atividade matemática e na compreensão das propriedades e relações das figuras geométricas; (ii) identificar e interpretar as ideias construídas pelos alunos; e (iii) compreender como é que a aprendizagem do tópico matemático contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A metodologia adoptada segue uma abordagem qualitativa e interpretativa. A recolha de dados foi feita em duas turmas-piloto do 7.º ano no ano letivo 2008/09, no âmbito da experimentação do Programa de Matemática do Ensino Básico, durante o tópico Triângulos e Quadriláteros.

Os resultados mostraram que a sequência de tarefas e a maneira como foram desenvolvidas em sala de aula, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Por outro lado, a utilização dos ambientes de geometria dinâmica possibilitou a interação dos alunos com desenhos dinâmicos. Este processo contribuiu para o desenvolvimento da capacidade do raciocínio espacial e, consequentemente do raciocínio geométrico.

Palavras-chave: Geometria; Raciocínio Geométrico; Ambientes de Geometria Dinâmica; Compreensão.

Introdução

Aprender, saber e compreender é um direito humano e esse direito não pode ser liquidado pela forma como a Matemática é vista e ensinada. As finalidades do ensino da Matemática devem portanto exprimir e privilegiar a importância da compreensão matemática, de modo a contribuir, entre outros aspetos, para o desenvolvimento da capacidade de usar a matemática para formular, analisar e resolver problemas.

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ministério de Educação, 2007) tem em consideração este aspeto na suas finalidades quando salienta a necessidade de o aluno compreender os conceitos matemáticos para que seja capaz de utilizar esse conhecimento de forma flexível e aplicá-lo adequadamente na resolução de situações, em contextos diversificados e, por outro lado, procurando assegurar que o aluno consiga elaborar conclusões, raciocínios e argumentações, comunicando-as e explicando-as.

O facto de o PMEB incluir a Geometria em todos os ciclos, focando como propósito principal de ensino a necessidade de desenvolvimento do sentido espacial dos alunos e colocando a enfâse na visualização e no raciocínio geométrico, criou um quadro fortemente motivador da escolha da Geometria para desenvolver um estudo que ajudasse a encontrar respostas a um conjunto de questões abrangentes: O que fazer para proporcionar aos alunos uma atividade matemática que os ajude a alcançar os objetivos associados a estas finalidades? Como é que os alunos desenvolvem essa atividade? Como é que essa atividade contribui para o desenvolvimento do raciocínio e para a elaboração de argumentações?

Contexto e Objetivo da Investigação

Com a homologação do PMEB, o Ministério da Educação criou um conjunto de medidas, de entre as quais se destaca a criação de turmas-piloto para a experimentação do Programa. O presente estudo foi realizado em duas destas turmas no ano letivo 2008/09 e procura analisar e compreender como os alunos aprendem Geometria e de que forma a atividade realizada em sala de aula contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Tendo em vista este propósito, formulou-se a seguinte questão como o problema do estudo: de que forma o processo de aprendizagem dos alunos no tópico Triângulos e Quadriláteros, apoiado numa sequência organizada de tarefas com recurso ao Geogebra, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico?

Para se responder a esta questão, identificaram-se os seguintes objetivos:

i. Analisar o contributo do Geogebra como ferramenta de apoio ao desenvolvimento da atividade matemática e à compreensão das propriedades e relações das figuras geométricas.
ii. Identificar e interpretar as ideias construídas pelos alunos.
iii. Compreender como é que a aprendizagem do tópico matemático contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A Geometria no Currículo de Matemática e os Ambientes de Geometria Dinâmica na Aprendizagem da Geometria

A geometria no currículo de Matemática

O estudo da Geometria teve, durante décadas, como principal objetivo ilustrar o caráter axiomático e dedutivo da Matemática.

Nunes (2011) refere que este posicionamento da Geometria no ensino, de relevância limitada, pode ter sido consequência da sua perda de importância nas investigações matemáticas ao longo século XX. Freudenthal (1971, 1991), na sua obra, opõe-se ao afastamento da Geometria dos currículos escolares, argumentando que a forma como está contemplada – destinada a ser utilizada como um veículo para ensinar Lógica – dá uma visão distorcida deste tema. Em 1971, Freudenthal defende que a Geometria "tem evoluído como um importante meio de compreensão e organização do fenómeno espacial" (p. 286). Por isso, assume que a Geometria deve centrar-se na construção de modelos concetuais. Salienta, ainda, que as crianças, desde cedo, devem começar a manipular material concreto em situações específicas e as estruturas dedutivas devem surgir de acordo com a maturidade dos alunos, em vez de a Geometria ser imposta como um sistema preconcebido. Defende, ainda, que o melhor caminho para aprender Geometria é permitir que o aluno tome gradualmente consciência da sua compreensão intuitiva do espaço.

Os estudos que têm sido desenvolvidos ao longo das últimas décadas revelam que a Geometria contribui, entre outros aspetos, para o desenvolvimento da visualização e do pensamento crítico e, por outro lado, esta capacidade de visualização, fazendo uso de diagramas e modelos geométricos para a interpretação e resolução de problemas, promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

A este propósito, Duval (1998) refere que o ensino da Geometria deve focar-se em desenvolver as capacidades de representação visual e de raciocínio, com base em experiências que favoreçam a sinergia entre estes dois processos. Por seu lado, Battista (2007) considera que a Geometria "é uma complexa rede de interligações entre conceitos, formas de pensamento e sistemas de representações que são utilizados para concetualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginados" (p. 843).

Também os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000/2007), destacam a necessidade e a importância do ensino da Geometria, por ser um tema em que os alunos podem aprender as formas e estruturas geométricas e analisar as suas caraterísticas e relações. Realçam ainda que a Geometria "constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos" (p. 44).

Em suma, é consensual que a aprendizagem da Geometria é fundamental, devendo ser dada especial relevância ao desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Em termos das atuais orientações curriculares, no PMEB (2007) o desenvolvimento da visualização e do raciocínio geométrico, surge como o propósito principal do ensino da Geometria. Nesse sentido, constata-se que este Programa é convergente com as várias recomendações recentes que encaram a Geometria como uma área de excelência para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Os ambientes de geometria dinâmica na aprendizagem da Geometria

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) têm atualmente implicações no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria, tendo em conta a sua utilização pedagógica, como é evidenciado em diversos documentos, desde há vários anos:

> O desenho, a manipulação e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso de raciocínio formal. Actualmente, ferramentas computacionais, designadas por ambientes de geometria dinâmica (*Cabri-Geometre, Geometer's Sketchpad,...*) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e a manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes. (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 68)

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. (...) Tanto os recursos computacionais, como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática. (Ministério da Educação, 2007, p. 51)

Gonzaléz e Herbst (2009) destacam como mais-valias da utilização dos AGD: (1) a organização do pensamento relativamente às relações entre os objetos geométricos e as noções teóricas em geometria; (2) o avanço para abstrações e generalizações; e (3) a aquisição de experiência com objetos geométricos e o estabelecimento de conexões que possibilita a justificação de relações entre objetos geométricos e, eventualmente, a produção de provas.

Nesse sentido, pode-se afirmar que o AGD é um meio propiciador para o desenvolvimento da compreensão matemática, em particular, da compreensão geométrica.

Contudo, muitos investigadores têm manifestado preocupação com a forma como o AGD é utilizado em sala de aula. Defendem que não pode ser pensado como uma ferramenta para fazer mais rápido, melhor ou num grau maior do que já se fazia, por exemplo, com o papel e lápis, numa abordagem tradicional do ensino da Geometria (Battista, 2007), ou para melhorar a atmosfera de sala de aula, aumentar a motivação dos alunos e para mostrar muitos exemplos rapidamente.

O AGD deve ser utilizado em contextos que permitam explorar ideias, que conduzam à discussão, reflexão e comunicação das descobertas matemáticas. Como tal, é fundamental repensar a natureza das tarefas a realizar em sala de aula. Estas devem ser concebidas de modo a encorajar os alunos a trabalhar a Geometria, utilizando o AGD como ferramenta, cujas potencialidades permitem explorar, conjeturar, refletir sobre os conceitos, propriedades e relações geométricas. Por outro lado, importa criar um ambiente de sala de aula que potencie a explicação matemática das conclusões que os alunos vão retirando da sua atividade matemática.

Sobre o raciocínio geométrico

O raciocínio em Matemática

Steen (1999), no *Yearbook* do NCTM dedicado ao desenvolvimento do raciocínio matemático, afirma que não é fácil ensinar a raciocinar matematicamente quando não sabemos o que realmente é o raciocínio matemático. Uma possível razão para esta afirmação, pode estar relacionada, como referem Yackel e Hanna (2003), com o facto de ser complicado escrever sobre o raciocínio e a compreensão, porque estes termos são utilizados, tendo sempre subjacente a ideia de que há acordo universal sobre o seu significado. Na realidade, estes termos são frequentemente utilizados por matemáticos e educadores matemáticos sem que estes os definam.

Para clarificar o que se entende por raciocínio, é importante ter em consideração dois princípios do pensamento humano que a ciência cognitiva oferece. Segundo Battista (2007), esses princípios são:

Princípio 1: A mente humana constrói significados em vez de os receber;

Princípio 2: O indivíduo constrói novo conhecimento e compreende-o baseando-se naquilo que já sabe e pensa.

Trazendo estes princípios para a Matemática, pode alegar-se que para compreender e aprender matemática é necessário que seja o aluno a construir os significados para as ideias matemáticas e que essa construção seja baseada no conhecimento do aluno e nas suas formas de raciocínio. Ou seja, o raciocínio é um elemento chave na construção dos significados matemáticos.

Desta perspetiva emerge que o raciocínio não é visto na sua noção tradicional “como abstrato e etéreo”, mas antes, “como real, físico e imaginativo” (English, 1997, p. vii). Para English (1997), o raciocínio matemático implica a existência de múltiplos raciocínios, os quais envolvem estruturas que emergem e subsistem a partir das experiências físicas realizadas, ao interagirmos com o ambiente. Por outro lado, a autora refere que o raciocínio matemático é imaginativo, no sentido em que utiliza dispositivos que estruturam estas experiências concretas e as transforma em modelos para o pensamento abstrato. Estes “dispositivos de pensamento” incluem as analogias, as metáforas, as imagens, a metonímia e o imaginário.

Segundo Yackel & Hanna (2003), esta perspetiva está em consonância com as de outros educadores matemáticos como Krummheuer (1995), Cobb (1994) e Saxe (1991) que assumem uma abordagem social, focando-se nos aspectos comuns ao raciocínio e a outras atividades matemáticas.

> (...) o raciocínio matemático é uma atividade comum na qual os alunos participam e interagem uns com os outros para resolver problemas (Yackel & Hanna, 2003, p. 228).

Kilpatrick e Swafford (2004) acrescentam que o raciocínio é visto como a utilização da lógica para explicar e justificar a solução de um problema ou para ampliar o conhecimento a partir de qualquer coisa conhecida. Assim, o raciocínio é também olhado como um processo para obter conclusões com base em evidências ou suposições prévias.

A partir destas ideias, conclui-se e assume-se que o raciocínio matemático é um processo de pensamento, que emerge a partir da experiência do aluno, para explicar, justificar e argumentar, para si próprio e para os outros, conjecturas, ideias matemáticas e ideias que ele próprio apresenta, bem como para escolher certos caminhos ou percursos durante a resolução de problemas. Assim, as “principais funções do raciocínio são compreender, explicar e convencer” (Hershkowitz, 1998, p. 29).

O raciocínio geométrico

A investigação tem mostrado a importância de criar ambientes de aprendizagem centrados no aluno que o ajudem a sentir a necessidade de explicar as suas ideias. Esses ambientes tendem a proporcionar situações em que os alunos têm de debater diferentes visões e interpretações, escolhendo argumentos que os ajudem a convencer os seus pares.

Nesta abordagem os alunos passam a ser parceiros na descoberta de factos geométricos e de relações geométricas, pela exploração e experimentação e pelo raciocínio indutivo. Por outro lado, o raciocínio dedutivo passa a ser, nesta perspetiva, um processo para compreender e explicar as conjecturas descobertas indutivamente e para, assim, serem validadas.

Este processo colaborativo, sustentado pela experimentação e indução, que recorre igualmente à dedução, torna-se no raciocínio geométrico que é a ferramenta para o processo de elaboração de prova, um processo em que tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo têm um papel central.

Para Duval (1998), o raciocínio em geometria é um processo que permite conseguir novo conhecimento a partir de informações dadas. Esse novo conhecimento é utilizado para provar, explicar e estender o conhecimento existente.

MacCrone e outros (2010) defendem que o raciocínio geométrico envolve a exploração ativa de meios através dos quais os alunos consigam investigar características das formas, as propriedades comuns de uma família de formas ou uma variedade de caminhos para modelar formas. Por isso, salientam que há quatro elementos chave no raciocínio, que incluem o seguinte: (i) formulação de conjeturas sobre os objetos geométricos; (ii) construção e validação de argumentos geométricos; (iii) múltiplas abordagens geométricas; e, (iv) conexões geométricas e modelação.

Na mesma linha de pensamento, Battista (2007) salienta que o raciocínio geométrico consiste, principalmente, na invenção e utilização de sistemas concetuais formais para investigar as formas e o espaço. Assim, inclui a construção e a investigação de imagens para responder às questões sobre elas e a transformação e a realização de operações sobre as imagens e a preservação das imagens ao serviço de outras operações mentais.

A partir desta concepção de raciocínio resulta que as imagens que se constroem mentalmente, os esquemas ou outras representações, são essenciais no desenvolvimento do raciocínio. Neste sentido, Battista (2007) refere que uma espécie de raciocínio fundamental é o raciocínio espacial que "é a capacidade para 'ver', para investigar e para refletir sobre os objectos espaciais, imagens, relações e transformações" (p. 843).

Muitos investigadores, com o propósito de analisar o raciocínio espacial, têm identificado componentes que ajudam a compreender a natureza deste tipo de raciocínio. Bishop (1983, citado por Clements & Battista, 1992), sugere duas componentes espaciais. A primeira diz respeito à capacidade de interpretar informação de figuras que envolve a análise e a compreensão de representações visuais e de vocabulário. A segunda é a capacidade para o processamento visual que envolve a manipulação e transformação de representações visuais e imagens e a tradução das relações abstratas e da informação dentro da representação visual.

Estas duas componentes espaciais estão presentes na maioria dos trabalhos de investigação (Bishop, 1980; Harris, 1981; MacGee, 1979; Kimura, 1999, citado por Pittalis e Christou, 2010; Sarama e Clements, 2009), tornando-se nas características fundamentais do raciocínio espacial: orientação espacial e a visualização espacial.

Em síntese, o raciocínio geométrico requer a reconstituição de imagens em termos de modelos mentais estruturados, de forma apropriada para investigar as formas e o espaço. Daí que Duval (1998), relativamente ao pensamento geométrico, faça notar que este envolve a visualização, a construção e o processo de raciocínio.

Compreender, o que é?

Quando se utiliza a palavra "compreensão" colocam-se sempre algumas dúvidas, sendo inclusivé muitas vezes afirmado que é uma palavra muito poderosa.

A palavra compreensão surge no dicionário[1] como ato ou efeito de compreender ou ato ou facto de perceber, aprender alguma coisa. Pode-se, por isso, referir que a compreensão aparece como um ato e, como tal, a experiência mental e emocional de compreender fenómenos depende da situação. Deste modo, seguindo a posição de Sierpinska (1994), assume-se que a compreensão pode ser vista como uma experiência ou uma potencial experiência mental. Por exemplo, "quando se diz que uma pessoa, que conhece as tabelas da multiplicação, compreende que 7 vezes 9 é 63, pode-se afirmar que, naquele momento, considera que 7 vezes 9 e 63 são iguais, ou que é capaz de o fazer em qualquer altura, por ter reflectido já sobre isso no passado" (p. 2).

Este exemplo mostra que existem experiências mentais efetivas, ou seja, atos de compreensão, e algo mais abrangente, "uma compreensão", que tem a ver com uma potencial experiência para o ato de compreensão quando necessário. Mas pode-se colocar a questão: Quando se refere a compreensão de um dado conceito que aspetos se estão a salientar?

Carreira (1998) defende que há pelo menos duas perspetivas em que esta preocupação se enquadra. Uma assume que "um conceito é um objecto teórico acabado, com uma existência própria, que pode ser denominado, definido ou descrito de alguma forma, que está relacionado com outros conceitos e pode ser interpretado no contexto de várias situações" (p. 107). A outra perspetiva é admitir que o "conceito está na capacidade de dar sentido àquilo que está na base do próprio conceito, isto é, o conceito está compreendido na medida em que ele emergir como resultado da compreensão de uma dada situação. Desse modo, a compreensão consistiria, fundamentalmente, em descobrir o que está na origem do conceito" (p. 107).

Nesse sentido, é importante a distinção "entre 'o que se compreende' e 'a base sobre a qual se compreende'" (Carreira, 1998, p. 107), uma vez que tem implicações muito objetivas na aprendizagem da matemática. No que se refere à compreensão de relações geométricas, parece muito clara esta distinção. Compreender a ideia de mediatriz de um segmento é certamente diferente se essa ideia for baseada na definição formal de mediatriz ou se for baseada na análise de propriedades desta reta em situações de manipulação de uma figura num ambiente de geometria dinâmica. Por exemplo, compreender que a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência passa pelo centro, é um ato de compreensão com importantes reflexos no "que se compreende" sobre o conceito de mediatriz e, ao mesmo tempo, sobre propriedades das cordas de uma circunferência, sobre o conceito de equidistância entre pontos, sobre relações de perpendicularidade, etc.

Esta ideia, da base sobre a qual se desenvolve a compreensão, está portanto em relação muito estreita com o potencial do AGD. Os atos de compreensão que podem ser realizados com base no arrastamento de figuras, na construção das mesmas a partir de primitivas geométricas, na análise de relações disponíveis pela medição automática, e na observação dos efeitos obtidos pela manipulação (retorno do software) constituem parte essencial da compreensão que os alunos desenvolvem acerca dos conceitos, propriedades dos objetos e relações geométricas.

[1] Dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea, da Academia das Ciências de Lisboa

Metodologia

Atendendo a que se pretende investigar a forma como o processo de aprendizagem dos alunos em Geometria, apoiado numa sequência de tarefas, com recurso ao Geogebra, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, optou-se por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa.

Neste artigo apresentamos excertos de dois episódios de dois pares de alunas de duas turmas-piloto do 7.º ano de escolaridade do ano letivo 2008/09, de uma escola da região norte do país. As turmas eram lecionadas por duas professoras que trabalhavam habitualmente em par pedagógcio (Professora A e Professora B). Todo o trabalho de planificação das aulas e a conceção de tarefas eram feitos em conjunto com os restantes professores das turmas-piloto da região centro, nas quais esteve presente e participou a investigadora, em particular nas reuniões de planificação do tópico em estudo. Após a realização das aulas as professoras refletiam sobre a atividade matemática dos alunos e sobre a gestão de aula. Essa reflexão e discussão era partilhada com a investigadora.

A experiência de ensino focou-se na sequência de tarefas do tópico Triângulos e Quadriláteros, com recurso ao Geogebra, baseando-se num ensino exploratório na sala de aula. A sequência de tarefas continha tarefas exploratórias, problemas e exercícios.

Os dados foram recolhidos pela investigadora e primeira autora, que recorreu a diversas estratégias e fontes de dados (Denzin & Lincoln, 1994), nomeadamente: entrevistas às alunas; observação e gravação em áudio e vídeo de aulas e acesso a diversos documentos, entre os quais, as produções escritas dos alunos, os ficheiros do Geogebra de cada uma das tarefas, registos escritos das professoras e ainda as reflexões das professoras sobre as aulas realizadas.

Para analisar os dados foram organizados episódios, divididos em duas partes. A primeira é relativa à utilização do Geogebra na atividade matemática dos alunos e a segunda relaciona-se com a forma como os alunos mobilizam o conhecimento na resolução de problemas.

O Geogebra e o Raciocínio na Geometria

Apresentamos em seguida excertos de dois episódios, relacionados com os *Critérios de congruência de triângulos* (ver Anexo I).

Tarefa com o Geogebra – Episódio 1

A aula começou com a distribuição da tarefa *Critérios de congruência de triângulos* e neste caso a professora A não apresentou a tarefa oralmente, nem fez uma introdução. Os alunos leram a tarefa, ligaram os portáteis e abriram o Geogebra.

Joana e Matilde perceberam que tinham de construir triângulos a partir das condições dadas e registar numa tabela as medidas dos triângulos construídos. Joana efetuou a construção de acordo com as condições dadas, sem dificuldade. Em seguida, fez as medições e registaram na tabela os valores pedidos. Mesmo antes da medição, Matilde afirma que os ângulos têm uma amplitude de 60º, mas não explica a razão.

> *Matilde: Agora temos de ver quanto é que medem os lados. É óbvio que os ângulos medem todos 60.*

(Depois de medirem os lados.)
Matilde: Burra, ele é equilátero. Tem os lados todos iguais.
Joana: OK. Agora vamos apontar.
(Vão passar para o segundo triângulo da alínea 1.)
Joana: Tem de ser igual, o triângulo.
Joana: Ah, pois não.

Ainda na mesma folha do Geogebra, optaram por construir um novo triângulo com as mesmas condições da alínea 1 (ver Figura 1).

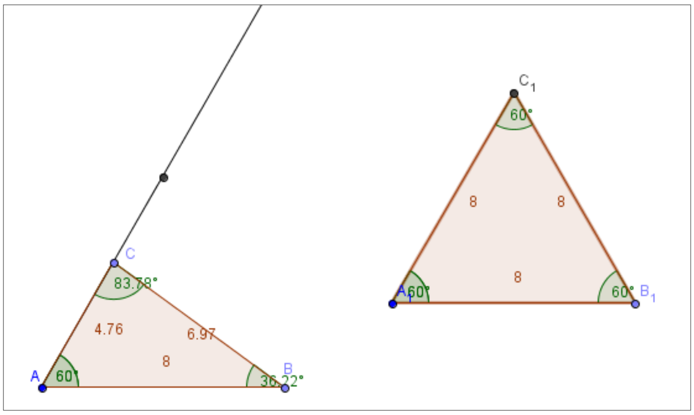

Figura 1. Construção da alínea 1 no Geogebra

De modo análogo iniciaram a alínea 2 e efetuaram os procedimentos necessários para obterem a informação das restantes medidas e registaram na folha (ver Figura 2).

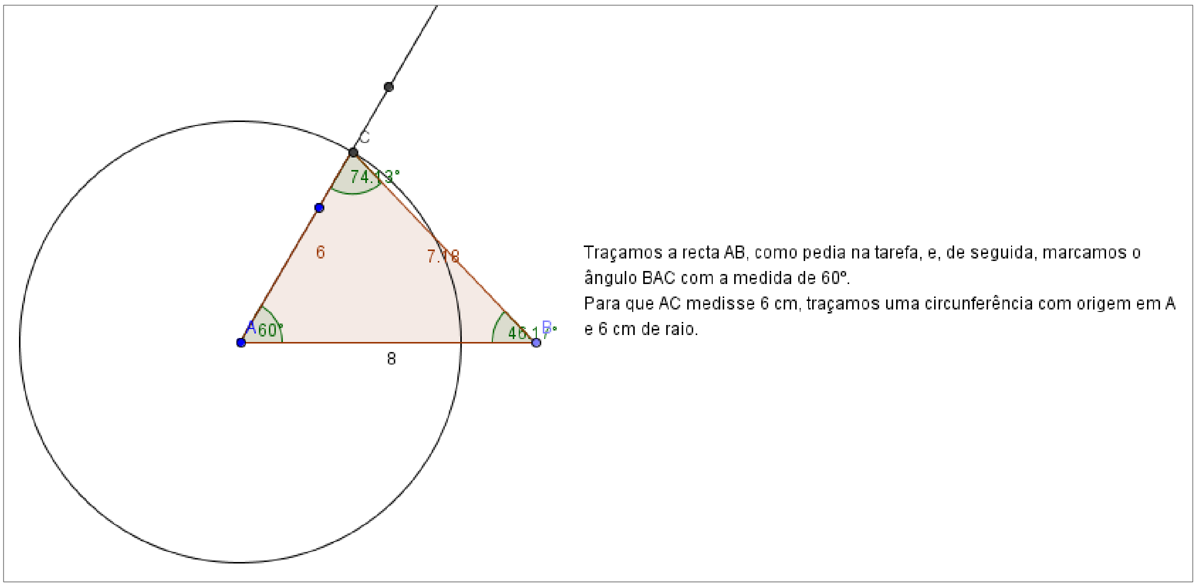

Figura 2. Construção da alínea 2 no Geogebra

Quando procuravam construir o segundo triângulo da alínea 2, verificaram que não conseguiam fazer um triângulo diferente. Ficaram a olhar para o ecrã, tentando perceber o que tinham feito. Perante o impasse chamaram, pela primeira vez, a professora.

Joana: Espera aí. Isto não dá para fazer de outra maneira. Se tens a medida de dois o outro tem de ser a união.
Matilde: Espera aí, vai ao outro, vai ao outro...
Joana: Vamos voltar a fazer e depois logo vimos.
(Voltaram a fazer o triângulo.)
Matilde: AB é 8.
(...)
Joana: Agora temos de unir os dois de qualquer maneira.
Matilde: Sim, mas podemos mexer.
Joana: Não, não podemos. (a aluna quer dizer que pelo facto de mexerem e arrastarem o triângulo, as medidas do triângulo não se alteram)
Joana: Fazemos só este e dizemos que não conseguimos fazer mais.

Na alínea 3 as alunas começaram por desenhar o segmento de recta CA com comprimento 10 cm, o ângulo BAC de amplitude 50º e fixaram a semi-reta com a inclinação do ângulo. Marcaram a circunferência de centro em A e raio 8 cm. Assim que fizeram este procedimento, pararam e hesitaram. A Joana disse: "Agora temos de unir estes dois de qualquer maneira" (apontou para os pontos B e C). A hesitação aconteceu ao perceberem que o segmento BC não respeitava as condições dadas, concluindo que estavam a repetir o caso anterior. Decidiram então apagar, desfazendo o que tinham feito e tentando perceber onde estava o erro.

Joana repetiu o procedimento e constatou que continuavam com dúvidas. Olharam de novo para a tarefa e Joana, com satisfação, afirmou: "Nós estávamos a fazer mal. Temos de marcar a circunferência em C". Efetuaram o procedimento e Matilde, apontando para a circunferência, afirmou: "Mas, oito podem ser estes todos". As alunas olharam para o ecrã e começaram a tentar marcar o ângulo e conseguiram identificar em que vértice deviam posicionar a sua origem (ver Figura 3).

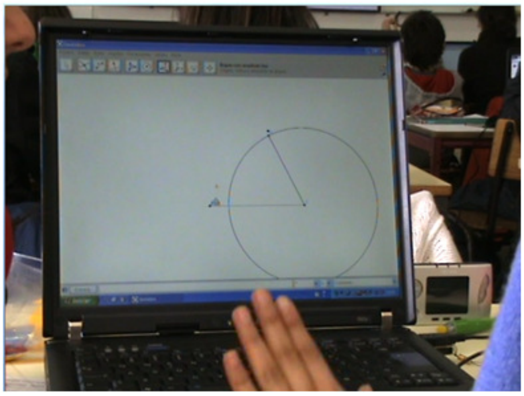

Figura 3. Joana e Matilde a construírem o(s) triângulo(s) da alínea 3

As alunas começaram a discutir como traçar o triângulo, em particular, o terceiro lado do triângulo.

Matilde: Ah, podemos prolongar aqui (aponta para o ponto A e com o dedo prolonga até ao ponto que está isolado que marca o ângulo de 50º)
Joana: Ah, já percebi. (Marca o segmento que vai de A até ao ponto isolado).

Contudo, voltaram a ter dúvidas e chamaram a professora. Entretanto, percebem que têm de encontrar a intersecção entre o segmento e a circunferência e marcar o ponto de interseção (ver Figura 4).

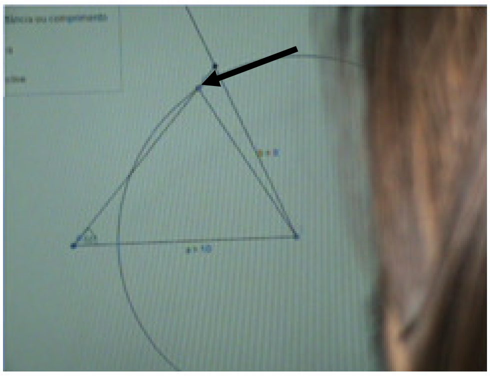

Figura 4. Marcação do ponto de interseção

> *Professora B: Então, qual é a solução, alguém me consegue explicar? Contem lá.*
> *Professora B: Então, onde é que está a solução? Qual é o vértice B?*
> *Joana: É este. (apontando para a intersecção que marcou.)*
> *Professora: É esse. Porquê?*
> *Joana: Porque tem 8 cm de CB e 50º.*
> *Professora B: Sim. É único? Não há mais nenhuma solução?!*
> *Joana: Não.*
> *Professora B: Olha bem para lá.*
> *Joana: Acho que não.*
> *Professora B: Olhem bem para lá.*
> (A Matilde aponta para a interseção entre o "lado AB" e a circunferência que ainda não tem o ponto de interseção marcado.)
> *Professora B: Decidam-se. Não estou a perceber.*
> *Matilde: É aqui. (apontando para o ponto que tinha indicado). Dá para pôr este aqui.*
> *Joana (com a seta do cursor, aponta para as duas intersecções): Dá aqui e aqui.*
> *Professora B: Força, coloca lá o ponto e explica porquê. Explica lá.*

As alunas marcaram o segundo ponto de interseção, os dois triângulos e recorreram às opções do menu do Geogebra para medir os lados e as amplitudes dos ângulos dos triângulos (ver Figura 5). Perante esta explicação, através da construção no Geogebra, a professora B disse: "Muito bem!".

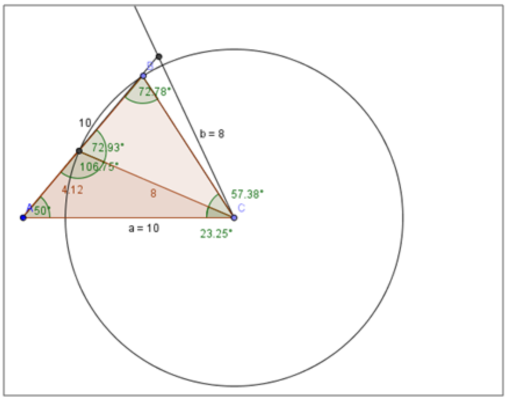

Figura 5. Construção da alínea 3 no Geogebra

Durante a discussão, todos os grupos conseguiram terminar a tarefa e obter as conclusões pretendidas. A professora A pediu aos alunos para identificarem em que condições era possível construir apenas um triângulo. Perante os resultados alcançados pelos alunos, a professora realçou os conceitos de congruência de triângulos e os critérios LAL, LLL e ALA de congruência de triângulos. A maioria dos alunos compreendeu a noção de congruência e durante o resto da discussão utilizou corretamente os critérios de congruência, bem como a sua nomenclatura.

Resolução de Problemas – Episódio 2

O episódio seguinte refere-se à tarefa 5 *Usando critérios de congruência de triângulos* (Anexo II).

As alunas, após a leitura e interpretação dos problemas, procuraram identificar condições que lhes permitissem utilizar os critérios de congruência de triângulos.

Maria: Esta linha fez o meio deste lado.
Professora B: Então, se este fez o meio quem é igual a quem?
Alunas: O segmento CE é igual ao segmento EA.
Professora B: Mais.
Maria: E o EF é igual ao ED.
Professora B: Porquê?
Maria: Porque o E está no meio.
Professora B: Mas isso, vais saber quando eles são congruentes. Mas, antes, enquanto que tu disseste que o CE é igual ao EA, sabemos porquê. Agora esses ainda não sabemos.

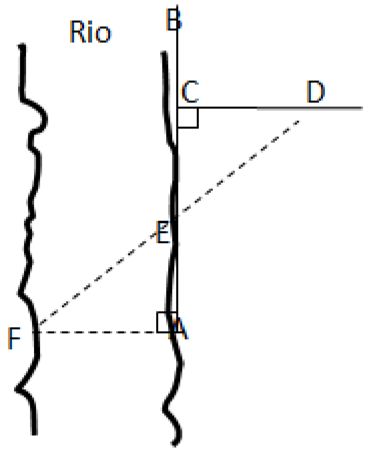

Figura 6. A figura dada no problema 1 da tarefa 5.

As alunas continuaram a insistir nos lados e a professora foi alertando para a sua impossibilidade, acabando por sugerir:

Professora B: Vamos lá aos ângulos.

Marta: Este ângulo é de 90º (aponta para o ângulo ECD) e é igual a este (aponta para o ângulo EAF).
Professora B: Que mais ângulos são iguais? Está aí mesmo na carinha.
Maria: Este é igual a este (aponta para os ângulos CED e FEA).
Professora B: Então, qual é o caso de congruência de triângulos que vamos usar?
Maria: É o ALA.
Professora B: Depois disso, tudo escrito. Há muita coisa para escrever. Depois disso tudo, o que é que temos a certeza? Que os dois triângulos são...
Alunas: Congruentes.
Professora B: Então podes pôr um em cima do outro. Então, como consequência disso é que os segmentos, como podes colocar um em cima do outro… Quem é que fica igual a quem?
Marta: O AE e o CE, o FE e ED e o FA e o CD.
Professora B: Isso mesmo. Muito bem. Está feito aqui deste lado.

A partir desta discussão, as alunas resolveram o problema, explicando uma à outra o que estava a ser feito, procurando assim clarificar as suas próprias ideias. Depois cada uma escreveu a sua resolução no caderno (ver Figura 7).

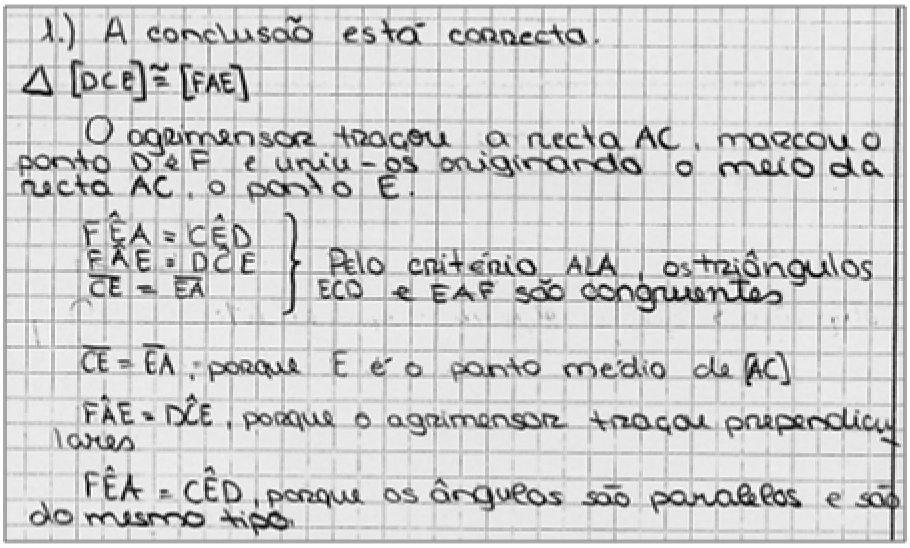
1.) A conclusão está correcta.
Δ [DCE] $\cong$ [FAE]
O agrimensor traçou a recta AC, marcou o ponto D e F e uniu-os originando o meio da recta AC, o ponto E.
$F\hat{E}A = C\hat{E}D$
$F\hat{A}E = D\hat{C}E$
$\overline{CE} = \overline{EA}$
} Pelo critério ALA, os triângulos ECD e EAF são congruentes
$\overline{CE} = \overline{EA}$, porque E é o ponto médio de [AC]
$F\hat{A}E = D\hat{C}E$, porque o agrimensor traçou prependiculares
$F\hat{E}A = C\hat{E}D$, porque os ângulos são paralelos e são do mesmo tipo.

Figura 7. Resposta da Maria ao problema do agrimensor

Esta foi a estratégia seguida pelas alunas ao longo dos restantes problemas. Compreender o enunciado, observar as figuras, identificar um caminho e desenvolver um raciocínio que lhes permitisse estabelecer uma estratégia que traduzisse os seus argumentos.

Conclusões

Os dois episódios relacionados com o estudo dos critérios de congruência de triângulos, evidenciam a importância do recurso ao Geogebra na atividade matemática dos alunos. O Geogebra provou ser uma ferramenta crucial de apoio à compreensão das propriedades e relações de figuras geométricas. O *feedback* visual que os alunos obtiveram enquanto interagiam com o programa foi fundamental para que conseguissem chegar às construções pretendidas, fazendo e refazendo os desenhos. À medida que foram utilizando esta ferramenta, os alunos conseguiram obter construções mais resistentes e utilizar, de uma forma mais adequada, as propriedades geométricas para efetuarem essas construções. Por outro lado, a combinação do arrastar e do medir, permitido por esta ferramenta, foi muito importante para que os alunos conseguissem explorar as propriedades das figuras geométricas. Esta constatação vai ao encontro do que referem Gonzaléz e Herbst (2009). Estas características, em conjunto, dão a possibilidade de os alunos utilizarem os valores numéricos e reunirem esses dados, à medida que vão arrastando, aspetos que os ajudam a estabelecer as relações dos objetos geométricos. Acrescenta-se que as observações realizadas pelos alunos sobre os polígonos, através do arrastamento com as medidas, permitiu-lhes aprofundar a sua investigação, ao conseguirem demonstrar as respetivas conclusões e conjeturas. Não ficaram, assim, apenas pela percepção visual das mesmas.

O conhecimento matemático que emerge do AGD é diferente daquele que emerge do ambiente de papel e lápis (Moreno-Armella e Hegdus, 2009). A dinâmica das representações geométricas no AGD e a diversidade de representações para o mesmo objeto geométrico, influenciam o modo como os alunos desenvolvem a compreensão dos conceitos matemáticos e, por isso, transformam a sua interação com a Matemática. Os alunos usam as representações que melhor se adequam, na sua perspectiva, para a demonstração ou justificação das suas conjeturas ou conclusões. Esta evidência também se verificou nos estudos desenvolvidos por Nunes (2011) e Canário, Amado e Carreira (2011), em tópicos de Geometria e de Álgebra, respctivamente. Por outras palavras, as funcionalidades do software conferem ao aluno a liberdade de optar por abordagens mais "geométricas", mais "numéricas" ou mais "algébricas", conforme se detém em aspectos da construção (relações e condições dos elementos da figura) ou em aspetos dos valores de medições ou em aspetos da representação algébrica por meio de equações cartesianas.

A interação dos alunos com as diferentes representações do mesmo objecto no Geogebra, bem como o dinamismo dos desenhos, ajudou-os na compreensão e na resolução de problemas, como mostram os episódios apresentados. Este processo contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio espacial e, consequentemente, para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Para terminar, deste estudo emerge uma ideia, também defendida por Hershkowitz (1998) e Jones (2000), que consideram o raciocínio geométrico como o alicerce para a aprendizagem da Geometria. Foi a partir do raciocínio geométrico que os alunos conseguiram desenvolver um processo de organização e de execução de ações mediante o qual os elementos de um contexto (desenhos no Geogebra, elementos de um problema) foram transformados em propriedades e relações geométricas.

Por outro lado, o raciocínio geométrico, sendo um processo que envolve a construção e a manipulação de representações mentais de objectos e relações para resolver as situações, torna necessária a comunicação dessa informação, contribuindo assim para a aprendizagem e para o desenvolvimento de uma linguagem matemática adequada. A explicitação dos raciocínios requer a comunicação matemática, oral ou escrita, para representar externamente as imagens mentais elaboradas, os resultados, os processos e as ideias que compõem esses raciocínios. Este longo processo, envolve a utilização da linguagem matemática apropriada, nomeadamente notação, simbologia e vocabulários próprios da Geometria. Deste modo, os alunos estão a desenvolver o raciocínio geométrico e, simultaneamente, estão a aprender conceitos geométricos, linguagem específica da Geometria, assim como propriedades e relações das figuras geométricas.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre currículos do ensino básico*. Lisboa: ME-DEB.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 843-907). Reston, VA: NCTM.

Canário, F., Amado, N. & Carreira, S. (2011). O Geogebra na construção de modelos matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da Matemática: Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 420-464). New York: Macmillan.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds). (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1997). Analogies, Metaphors and Images: Vehicles for Mathematics Reasoning. In L. D. English, (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 3-18). London: LEA.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

González, G. & Herbst, P. G. (2009). Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14, 153-182.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (Eds). (2004). *Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

McCrone, S. M., King, J., Orihuela, Y. & Robinson, E. (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Geometry*. Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM*, 41, 505-519.

NCTM (2000/2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, D. (2011). *O Significado Matemático na Geometria do 7.º ano com recurso ao Geogebra: Uma Perspectiva Semiótica*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve).

Pitalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212.

Sarama, J. & Clements, H. D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. New York: Taylor & Francis.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio, (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. (NCTM, 1999 Yearbook) (pp. 270-285). Reston, VA: NCTM.

Yakel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter, (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Anexo I

Triângulos e Quadriláteros

Tarefa 4 - Critérios de congruência de triângulos

As construções seguintes devem manter as suas propriedades quando os vértices são arrastados.
Para cada uma das alíneas constrói, se possível, dois triângulos de vértices A, B e C de acordo com os dados indicados.
Regista na tabela em baixo os valores dos comprimentos dos lados do triângulo e as medidas das amplitudes dos ângulos formados por eles.

1.
AB = 8 cm
∠BAC = 60º

2.
AB = 8 cm
∠BAC = 60º
AC = 6 cm

3.
CA = 10 cm
CB = 8 cm
∠BAC = 50º

4.
CA = 10 cm
CB = 8 cm
AB = 11 cm

5.
AB = 8 cm
∠BAC = 40º
∠ABC = 60º

6.
∠BAC = 15º
∠ABC = 100º
∠ACB = 65º

Alíneas	AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB
1						
1						
2						
2						
3						
3						
4						
4						
5						
5						
6						
6						

Anexo II

Triângulos e Quadriláteros

Tarefa 5 - Usando critérios de congruência

1. Um agrimensor romano (cerca de 180 d.C.) usou triângulos congruentes para determinar a largura de um rio numa determinada zona do seu leito. Vejamos de modo resumido em que consistiu o seu método. Traçou uma recta AB ao longo da margem onde se encontrava. Num ponto C tirou uma perpendicular CD a AB. Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC. De A traçou uma recta imaginária perpendicular a AC. De D observou os pontos E e F de modo que os pontos D, E e F fossem colineares. Concluiu que CD = AF . Esta conclusão está correcta? Porquê?