RACIOCINAR COM PADRÕES FIGURATIVOS

Isabel Vale

ESE do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel

Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo

terpimentel@gmail.com

Resumo

Com base em referenciais teóricos e empíricos, aborda-se globalmente a questão do raciocínio em matemática e a importância que as tarefas de padrões têm na aula de matemática ao permitir formas diversificadas de raciocínio, em particular na formulação de conjeturas e na expressão da generalização, recorrendo sobretudo a um tipo específico de raciocínio, o indutivo. Dentro das tarefas com padrões valorizamos de modo muito especial os padrões figurativos, por permitirem a ligação de vários modos de representação, e por haver evidência de que a necessidade de consistência entre essas representações permite uma melhor compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, de modo mais eficaz, à conjetura e generalização, à explicação e argumentação, e, em última análise, à prova.

Palavras-chave: Padrões figurativos; raciocínio visual; raciocínio indutivo.

Introdução

Este texto não é resultado de qualquer estudo empírico mas antes constitui uma reflexão fundamentada em referenciais teóricos e empíricos, em particular em trabalhos por nós desenvolvidos no âmbito da temática dos padrões. Neste âmbito pretendia-se, entre outros aspetos, evidenciar de que modo uma aula de matemática desenvolvida através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões pode potenciar capacidades transversais nos estudantes, designadamente o raciocínio. Ao privilegiar os contextos figurativos pretende-se realçar, por um lado, a importância da visualização, não só como componente fundamental para a compreensão de propriedades geométricas mas também numéricas, e por outro a necessária flexibilidade na compreensão de factos e relações numéricas e/ou geométricas. Desta exploração de padrões emerge a formulação de conjeturas e a generalização.

Conjeturar, generalizar e provar permitem o desenvolvimento do raciocínio e, portanto, as tarefas que envolvam estes processos devem fazer parte das aulas de matemática em qualquer nível de escolaridade. Neste sentido, vários educadores referem que o raciocínio e a prova não são tarefas reservadas para ocasiões ou para tópicos especiais do currículo devendo ser encaradas naturalmente pois são fundamentais tanto para fazer como para aprender matemática (e.g. Harel & Sowder, 2007; NCTM, 2000). No entanto, os professores ainda manifestam alguma resistência em propor ambientes de aprendizagem que encorajem os alunos a procurar estratégias alternativas e diferentes modos de pensar, e os apoiem a fazer conjeturas, explicar e argumentar, elevando deste modo o nível de raciocínio e desempenho na resolução de problemas (Stein & Lane, 1996). Este aspeto pode em parte ser devido às inseguranças que os professores têm em relação à prova e à falta de tarefas disponíveis para abordarem estes processo de forma envolvente e simples. Outra razão, de acordo com Mariotti (2010), prende-se com as dificuldades que sabem que os seus alunos encontram quando têm de elaborar justificações e provas. Esta dificuldade pode residir na falta de conhecimento sobre os conceitos essenciais, falta de conhecimento de estratégias para provar ou do modo de iniciar o processo, no facto de que não se adquire de um momento para o outro as capacidades de raciocínio necessárias para desempenhar qualquer tipo dessas tarefas, e também por não reconhecerem a necessidade de uma prova.

As tarefas com padrões figurativos podem constituir um bom exemplo de abordagem a estes processos complexos, principalmente conjeturar e generalizar, por permitirem uma interação amigável quer para professores quer para alunos. Há estudos que mostram que os alunos de vários níveis são capazes de observar, formular conjeturas e explicar se começarem a trabalhar a partir de casos particulares, ações que fazem parte do processo de raciocínio indutivo (e.g. Barbosa, 2011; Cañadas & Castro, 2005; Pimentel, 2011, Vale & Pimentel, 2010). O trabalho de Stylianides e Silver (2010) também contribuiu fortemente para a reflexão sobre os processos de raciocínio em jogo no trabalho com padrões, pois levanta a questão, já por nós colocada (Pimentel & Vale, 2012), de saber se o que se desenvolve com apoio da argumentação visual constitui uma prova. Com base nestes estudos procurar-se-á refletir sobre se o trabalho com padrões é apenas raciocínio indutivo, com formulação de conjeturas e generalização, ou se a estrutura matemática conferida pela representação visual permite explicar e justificar a generalização feita, ou seja, se é raciocínio dedutivo.

Os Contextos Visuais e os Padrões

Num passado recente, a maioria das tarefas de matemática apresentadas sobretudo no ensino básico eram exclusivamente baseadas em palavras e números. As perspetivas atuais, tanto ao nível do currículo como da avaliação, direcionam-se para formas de representação mais visuais. Consequentemente, são necessários modos de interpretar as diferentes formas de apresentação visuais e espaciais. No entanto, como é referido por vários autores (e.g. Lowrie, 2012), o ato de serem capazes de ver imagens não garante que possam criar imagens, nem a visualização de um gráfico prepara melhor um aluno para representar dados de maneira adequada.

Neste ponto é necessário clarificar o significado de alguns termos utilizados. O raciocínio visual é considerado como o raciocínio que envolve compreender um problema ou um conceito baseado num diagrama ou imagem (e.g. Dreyfus, 1991; Jones, 2001). De acordo com Arcavi (2003), a visualização envolve o produto e o processo de criação, interpretação e reflexão sobre imagens. Para Zimmerman e Cunningham (1991), a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. Gutiérrez (1996) caracteriza a visualização como o tipo de atividade que tem por base o recurso a elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, utilizados na resolução de problemas ou na demonstração de propriedades. A visualização, para Eisenberg e Dreyfus (1989) está associada a representações visuais, isto é, à construção de modelos visuais que refletem a estrutura matemática subjacente, considerando que qualquer conceito matemático pode ser traduzido por um gráfico ou um diagrama.

Deste modo, dado que na literatura há uma grande pluralidade de interpretações do significado de termos em jogo, e por se identificarem muitos pontos de semelhança entre os conceitos *raciocínio visual* e *visualização*, usam-se neste texto indiscriminadamente ambos os termos.

Do ponto de vista educacional, a visualização tem vindo a tornar-se uma componente importante a contemplar no ensino da matemática. Neste âmbito, defendemos o uso dos padrões pelas suas potencialidades educativas. Apresentamos como definição de padrão ou regularidade "uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática" (Pimentel & Vale, 2012, p. 33).

Dentro dos padrões valorizamos de modo muito especial os padrões figurativos, por permitirem a ligação de vários modos de representação, e por haver evidência de que a necessidade de consistência entre essas representações permite o enriquecimento da compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, de modo mais eficaz, à conjetura e generalização, à explicação e argumentação. Ver um padrão é necessariamente um primeiro passo na exploração de padrões (Freiman & Lee, 2006), mas os estudantes devem ter agilidade percetual para *ver* o padrão de várias formas, o que lhes permitirá abandonar aquelas que não lhes são úteis. Consideramos de particular importância, sobretudo para a exploração com alunos de níveis mais elementares, a utilização de padrões figurativos, em que o modo de ver o arranjo pode ajudar a estabelecer relações e consequentemente a produzir a generalização (Vale & Pimentel, 2010).

No fulcro da ideia de padrão está uma regra de consistência extremamente útil no aprofundamento da compreensão das relações entre os objetos do arranjo que manifesta uma estrutura. Com este apoio, o aluno que explora o padrão terá mais facilidade na produção de uma lei de formação que traduza matematicamente a estrutura subjacente ao padrão. Digamos que a visualização explica dum modo muito mais claro a generalização feita, que de outro modo, ou não poderia simplesmente ser efetuada por falta de ferramentas matemáticas, ou, efetuada apenas numericamente, converter-se-ia num mero exercício de tentativa e erro e de manipulação simbólica com pouco significado. Esta nossa posição vai de encontro ao que é referido recentemente por Dreyfus, Nardi e Leiken (2012). Para estes autores a importância da contribuição das representações visuais na prova em matemática tem vindo a crescer.

Contudo, tem sido questão central em debate é se uma representação visual pode ser considerada como um adjunto para a prova, como parte integrante da prova ou como prova. Esta questão tem, ao nível da educação, muito a ver com as conceções/perspetivas do professor sobre o papel que a visualização pode desempenhar no raciocínio matemático. Na verdade, os puristas não consideram prova matemática algo que assente completamente na visualização, mas, ainda que não possa ser considerada prova, não deixa de fornecer uma explicação clara da veracidade de uma afirmação, estimulando o pensamento matemático, e ajudando a ver por onde começar para fazer uma prova formal.

Raciocinar e Provar

Falar de raciocínio e de prova não é tarefa fácil pois os termos tendem por vezes a confundir-se. Começamos por analisar o significado de raciocínio matemático. Lithner (2008) refere que se fala muito na literatura em raciocínio matemático implicitamente (sem o definir), identificando-o tacitamente com o raciocínio lógico-dedutivo. Para Thompson (1996), raciocínio é "inferência intencional, dedução, indução e associação nas áreas da quantidade e da estrutura" (p. 267). Neste sentido fica claro, por um lado, que nem todo o pensamento é raciocínio, uma vez que pensar nem sempre envolve estes processos mentais. Por outro lado, esta definição garante também que o raciocínio não se restringe ao processo dedutivo.

No entanto, há vários termos usados referindo-se a *raciocínio*: o pensamento crítico, o pensamento racional, o raciocínio lógico. Do mesmo modo há vários tipos de raciocínio específico de acordo com a área da matemática: raciocínio numérico, algébrico, funcional, proporcional, analítico, geométrico, probabilístico, estatístico... Apesar de diferentes áreas utilizarem termos diferentes, existem no entanto pontos em comum que fazem parte dos tipos de raciocínio mais geral e tradicionalmente considerados: raciocínio indutivo e raciocínio dedutivo. O primeiro parte do particular para o geral; parte da observação de dados, sobre os quais formula hipóteses explicativas, e, com base na experimentação em vários outros casos, generaliza a conclusão a um conjunto mais vasto. O segundo surge da necessidade de verificar a validade dessa generalização, e baseia-se em argumentos lógicos do tipo *modus ponens:* Se A implica B e A é verdadeiro então B é verdadeiro**.**

De acordo com Lowrie (2012), a pessoa, ao raciocinar, tende a identificar padrões em situações quer do mundo real quer do mundo simbólico, questionando-se se esses padrões são acidentais ou se ocorrem por algum motivo, permitindo-lhe conjeturar e provar. Para isso usam processos tais como classificação, comparação, sequenciação, análise de partes e do todo, identificação de padrões e relações, indução, dedução e visualização espacial.

Resnick (1987) defende que o raciocínio matemático é uma capacidade crítica que permite que um aluno faça uso de todas as outras capacidades matemáticas. Os alunos que raciocinam matematicamente são capazes de refletir sobre as soluções obtidas para os problemas e utilizar essa reflexão sistematicamente para decidir se as soluções fazem ou não sentido.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o raciocínio é apresentado como uma capacidade transversal que envolve a formulação e teste de conjeturas e a sua justificação; a compreensão do que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo; a distinção entre raciocínio indutivo e dedutivo; o conhecimento de métodos de demonstração; e a construção de cadeias argumentativas. Também, de acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), "Raciocinar em matemática é um processo evolutivo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p.10). Estes autores estabelecem um modelo do processo de raciocínio matemático que relaciona de forma interativa a conjetura e generalização, a compreensão do "porquê" e a justificação ou refutação. Os autores dividem cada um destes aspetos em compreensões essenciais que o aluno deve possuir por forma a poder exercer o raciocínio nas diversas etapas. No primeiro aspeto, que abrange a conjetura e a generalização: (a) conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com vista a estabelecer afirmações que se procura que sejam verdadeiras embora não se saiba; (b) generalizar envolve a busca de aspetos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial; (c) generalizar envolve reconhecer o domínio relevante; e (d) conjeturar e generalizar incluem usar e clarificar o significado de termos, símbolos e representações. No segundo aspeto o raciocínio leva à pesquisa de vários fatores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. No terceiro, envolvendo a justificação ou refutação: (a) a justificação é um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas; (b) uma refutação envolve demonstrar a falsidade de um caso particular; (c) a justificação e a refutação incluem a avaliação da validade dos argumentos; e (d) uma justificação válida de uma afirmação geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplos (Pimentel & Vale, 2012).

Numa visão um pouco diferente, para Lowrie (2012) raciocinar matematicamente refere-se à capacidade para analisar situações matemáticas e construir argumentos lógicos. O NCTM (2000) utiliza o termo prova matemática com o significado de conjunto de argumentos que consistem em deduções logicamente rigorosas a partir de hipóteses. Numa perspetiva mais alargada, e de acordo com Thompson (1996), para Lithner (2008) o raciocínio é uma linha de pensamento, um modo de pensar, adotado para produzir afirmações e chegar a conclusões, não necessariamente baseado num processo formal lógico-dedutivo. E não está necessariamente restrito à prova; inclui o pensamento dos alunos (de todos os níveis de ensino) nas suas tarefas matemáticas normais. Argumentação é a fundamentação, a parte do raciocínio que visa convencer-se a si mesmo ou a outra pessoa de que o raciocínio é apropriado.

Stylianides (2007) tem procurado desenvolver uma visão mais abrangente da prova para os diferentes níveis de escolaridade. Considera prova como um argumento matemático que compreende afirmações, raciocínio e formas de expressão que estejam ao alcance dos alunos em cada aula de matemática. E de facto, grande parte das vezes é o raciocínio indutivo que ajuda os alunos a construir os seus argumentos dedutivos, ou seja, a prova. Cañadas e Castro (2005) estão na mesma linha quando referem que muitos estudos sobre a prova matemática usam o rigor como critério para classificar diferentes tipos de provas. As provas em que o raciocínio indutivo é predominante devem estar num nível mais baixo do que as provas que envolvem raciocínio dedutivo. Neste sentido, uma prova em que estão envolvidos desenhos ou números concretos e onde o raciocínio indutivo é predominante, será considerada uma prova informal. Por outro lado, se tanto o raciocínio dedutivo como a linguagem algébrica estiverem envolvidos numa prova, esta será considerada mais formal. Jones e Herbst (2012) consideram que o maior ou menor grau de formalização relaciona-se com o nível de ensino em que os alunos se encontram. Por exemplo, nos primeiros anos do ensino básico, a prova é geralmente trabalhada em termos de raciocínio informal. Já nos anos seguintes, vão continuando a explorar a prova como argumentação, mas dum modo mais formal.

Do mesmo modo, de acordo com Harel e Sowder (1998) grande parte do trabalho do matemático é despendido a explorar e a conjeturar, e não a procurar provas. Estes autores definem conjetura como "uma 'observação' feita por uma pessoa que não tem qualquer dúvida sobre a sua veracidade; essa observação deixa de ser uma conjetura e torna-se num facto, do ponto de vista dessa pessoa, a partir do momento que esteja certa de sua veracidade" (p. 241). A conjetura é o resultado de uma observação constante através da qual se deteta uma regularidade ou padrão. Pólya (1954) mostrou como uma conjetura matemática pode ser gerada após a observação de um ou de vários exemplos para os quais a conjetura é verdadeira.

Dreyfus et al. (2012) consideram que provar inclui uma variedade de aspetos que influenciam o aparecimento da prova e a maneira como esta pode ser concebida por alunos e professores. Estes aspetos abrangem: diferentes representações, incluindo a visual, a verbal e a dinâmica, que podem ser utilizadas no decurso da produção de prova; diferentes formas de argumentar matematicamente, tais como argumentos indutivos baseados em exemplos, argumentos genéricos, bem como argumentos produzidos individualmente versus socialmente; diferentes graus de rigor e de detalhe; provas múltiplas, ou seja, provas diferentes para o mesmo enunciado matemático, que podem ser usadas em paralelo ou sequencialmente, por uma única pessoa ou um grupo.

Verifica-se com esta revisão que, embora a prova esteja incluída no raciocínio, nem todo o raciocínio é prova. No entanto não é consensual a definição de prova, havendo autores que têm uma visão mais abrangente que engloba aspetos tradicionalmente associados ao raciocínio indutivo.

Os Padrões e o Raciocínio

Para além dos dois tipos clássicos de raciocínio, há vários autores (e.g. Radford, 2008; Rivera, 2008) que consideram um outro tipo: o raciocínio abdutivo. A abdução é uma inferência não necessária, uma hipótese explicativa prévia. Apesar de este ser o modo de inferência menos seguro, pois o seu sucesso depende da intuição e do conhecimento prévio, é um tipo de raciocínio com forte referência à descoberta de padrões, pois ele é a porta de entrada no raciocínio indutivo, correspondendo à fase de procura da hipótese preliminar sobre o que têm em comum os dados analisados, assumindo assim uma importância fulcral no avanço duma exploração matemática. De facto, as hipóteses formuladas são apenas plausíveis uma vez que não é utilizado o raciocínio dedutivo, mas é nesta fase abdutiva que intervém fortemente a criatividade na elaboração de novas ideias (Rivera, 2008). Pólya (1954) chama a esta fase inicial da criação matemática raciocínio plausível, defendendo que, antes de se atingir a certeza absoluta, há que passar por uma conjetura plausível, precisando-se do provisório antes de atingir o definitivo, tal como precisamos de andaimes para construir um edifício. Enquanto que a abdução consiste na escolha da hipótese, a indução já envolve a sua testagem. A abdução é o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde à etapa seguinte, a de testar a conjetura em mais dados. Este processo pode ser cíclico até ser construída uma generalização.

De acordo com Rivera e Becker (2007) o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução. A indução necessita inicialmente da afirmação abdutiva que é depois sujeita ao teste repetido de confirmação para verificar a sua resistência. Em sintonia com estes autores, Yu (2006) resume de forma clara e concisa as ideias principais destes três tipos de raciocínio, afirmando que a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica.

Ora as tarefas com padrões dão oportunidades aos estudantes de desenvolver o pensamento algébrico, processo no qual generalizam diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências. Entendemos por padrão O NCTM (2000) recomenda que os alunos devem usar o raciocínio indutivo para procurar relações matemáticas, através do estudo de padrões. Vários investigadores preconizam o estudo de padrões figurativos de crescimento (e.g. Barbosa, 2011; Orton, Orton & Roper, 1999; Vale & Pimentel, 2010; Pimentel, 2011) como uma das possíveis abordagens para ajudar os estudantes a generalizar e a representar relações. De facto, e de acordo com Lannin et al. (2011) a generalização envolve identificar aspetos comuns entre os casos ou ampliar o raciocínio para além do domínio no qual foi originado, fazendo assim a ponte entre a saída de um mundo de objetos particulares e o tipo de raciocínio que designamos por abdutivo.

As tarefas com padrões de crescimento em contextos figurativos têm recentemente sido utilizadas nas aulas de matemática mas nem sempre exploradas de modo a desenvolver um raciocínio adequado, em particular o raciocínio funcional. O nosso objetivo fundamental é que a generalização possa ser feita partindo da análise das figuras, envolvendo raciocínio visual que analisa as características espaciais do padrão. A partir desta constatação desenvolve-se um conjunto de relações numéricas que permitem efetuar uma generalização através do raciocínio funcional. Este processo de generalização, embora possa aplicar-se a toda a produção de conhecimento matemático, está em forte ligação com as tarefas de exploração de padrões usadas como veículo para o pensamento algébrico. Radford (2010) sugere como definição para a generalização algébrica de um padrão a capacidade de compreender aspetos comuns detetados em alguns elementos de uma sequência S, tendo consciência de que estes aspetos comuns se aplicam a todos os termos de S, e sendo capaz de os usar para fornecer uma expressão direta de qualquer termo de S.

Mas será que este processo pode garantir, por si só, a veracidade da conclusão? Chegamos neste momento a um ponto fulcral: haverá circunstâncias em que o processo de generalização de padrões ultrapassa as fases de raciocínio abdutivo e indutivo, tocando o raciocínio dedutivo? Para tentarmos responder a esta questão vamos analisar com algum pormenor um trabalho de Stylianides e Silver (2010). Estes autores desenvolvem um quadro teórico sobre raciocínio e prova no ensino e aprendizagem da matemática que engloba a atividade matemática associada a identificar padrões, elaborar conjeturas, apresentar provas e apresentar argumentos que não provam. As duas primeiras incluídas no conceito de fazer generalizações matemáticas e as duas últimas incluídas na noção de suporte a afirmações matemáticas. Neste quadro, os autores definem padrão como "uma relação matemática geral que se adapta a um dado conjunto de dados" (p.239). O quadro teórico distingue entre dois tipos de padrões – definidos e plausíveis – atendendo ao facto de estarem ou não univocamente determinados. No primeiro caso, o aluno, através da informação dada na tarefa, pode ter a certeza da evidência do padrão que seleciona; no segundo caso, não é matematicamente possível para o aluno uma evidência conclusiva da seleção de um único padrão através da informação dada na tarefa. Os autores consideram importante modificar a tarefa de modo a tornar o padrão definido, porque o aluno deve, não só, descobrir o padrão, mas explicar porque é que determinada generalização funciona. E se nos padrões definidos é possível apresentar evidência conclusiva, tal já não é possível nos plausíveis, porque a escolha de um padrão específico em vez de outros possíveis já não obedece a critérios matemáticos. O que não quer dizer que os alunos não possam envolver-se em justificações produtivas de uma generalização feita nos padrões plausíveis, assumindo uma estrutura particular que transforma um padrão plausível num definido e apresentando evidência conclusiva para esse padrão. Como exemplo apresentam sequências numéricas em que são dados os três primeiros termos, que não são obviamente padrões definidos, assumindo o aluno implicitamente que se trata de um padrão linear. A sequência 0, 3, 6, … está incluída neste caso.

O ponto de partida do artigo de Stylianides e Silver (2010) baseia-se na afirmação de uma professora de que é difícil para ela trabalhar os padrões com os alunos porque estes não acreditam neles próprios, nem no padrão, nem na matemática envolvida. Mesmo que descubram uma fórmula que parece funcionar, só acreditarão que têm a resposta se construírem efetivamente 50 ou 100 termos do padrão. A propósito apresentam um problema de padrão em que eram dados alguns termos de uma sequência constituída por comboios de hexágonos regulares (Figura 1) em que se pretendia saber o perímetro das sucessivas figuras. Informava-se ainda que, para cada comboio, o comboio seguinte era obtido dele acrescentando um novo hexágono.

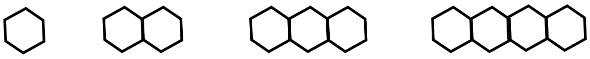

Figura 1. Comboios de hexágonos (Stylianides & Silver, 2010)

O trabalho foi feito com um grupo de professores em formação contínua e a primeira apresentação revelou que as professoras convertiam imediatamente a sequência numa sequência numérica e procuravam, através de métodos algorítmicos não justificados e de tentativa e erro, encontrar uma lei que correspondesse aos valores numéricos.

A sequência numérica dos perímetros é 6, 10, 14, 18, … e as professoras descobriram que se passava de um termo para o seguinte adicionando 4 e, como tal, a fórmula devia ser do tipo 4n. Depois, procederam por tentativa e erro para descobrir a correção que faltava, o "+2".

O formador perguntou como é que o padrão encontrado poderia ser visto na figura e não só pelos valores numéricos, mas as professoras não souberam responder.

Foram depois explorados vários modos de ver utilizando a figura. Os autores concluem que a tarefa proporcionou aos professores a oportunidade de descobrir a estrutura matemática subjacente a um padrão definido e utilizar essa estrutura para derivar uma regra que pode ser usada para calcular, conclusivamente, o perímetro de qualquer comboio. Esta estrutura matemática, que tornava o padrão definido, era garantida pela informação de que qualquer comboio se obtinha do anterior à custa de um hexágono adicional. No entanto, os professores, na sua abordagem apenas numérica, empírica, trataram o padrão como se fosse apenas plausível, limitando-se a analisar isoladamente valores numéricos, sem os relacionar com a estrutura matemática garantida pela figura e pelo enunciado. Os autores argumentam que a estrutura definida do padrão não era transparente para estes professores, e daí terem algumas dúvidas sobre se a fórmula estava ou não correta. De facto, isto acontece porque os dados numéricos, por si sós, não constituem um padrão definido, podendo haver outras possibilidades. Por exemplo, a lei $n^3 - 6n^2 + 15n - 4$ adapta-se aos três primeiros termos.

O método algorítmico usado por alguns professores, de que se há uma diferença constante de 4 então o fator de escala é 4, por um lado não ajuda os alunos a atribuir significado ao que estão a fazer, e por outro não funciona para padrões não lineares. Os autores defendem ainda que a compreensão, por parte dos professores, da distinção entre padrões definidos e plausíveis, é importante, entre outros aspetos, por ajudar os alunos na área do raciocínio e prova: (1) auxiliando os alunos no reconhecimento dos limites da evidência empírica (às vezes os padrões não generalizam em formas sugeridas pelos primeiros termos), e (2) desenvolvendo a apreciação pelos alunos de modos dedutivos de pensar (por vezes podemos justificar a seleção de um padrão sem a necessidade de examinar mais casos).

Também no nosso trabalho com padrões encontramos exemplos da tendência da maioria dos professores – e consequentemente dos seus alunos – para fazerem uma abordagem numérica aos padrões figurativos, como são evidência os exemplos da Figura 2:

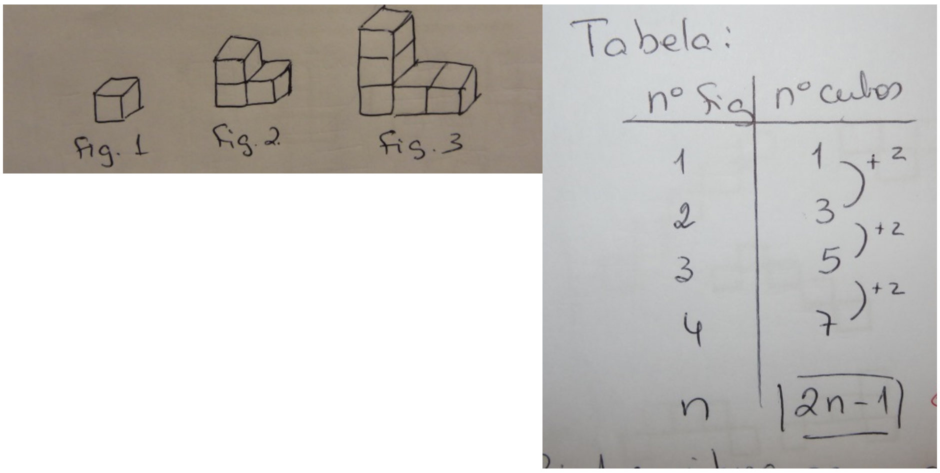

Figura 2. Transferência do padrão figurativo para uma representação exclusivamente numérica

Esta foi uma das razões fundamentais da necessidade por nós sentida de criação de uma proposta didática (Vale & Pimentel, 2010) que levasse alunos e professores a raciocinar visualmente. A representação numérica é importante, até porque constitui a ponte para a representação algébrica, mas apenas se mostrar aquilo que se vê. Neste caso foi apenas feita uma generalização aritmética (por recorrência) e a expressão do termo geral foi encontrada por tentativa e erro. Radford (2010) afirma mesmo que quando se chega a uma fórmula por tentativa e erro, não há generalização mas apenas indução *naïve*. Consideramos que isso acontece quando os alunos não *veem*, aproveitando a representação figurativa da sequência, mas estão mais preocupados com a descoberta de relações numéricas.

Depois de trabalhada a proposta didática já surgem resoluções como as seguintes, em que a visualização é utilizada como auxiliar precioso para a generalização e sua justificação. Relativamente ao exemplo 2, no primeiro caso, na Figura 3, na tabela surgem, mais do que números, expressões numéricas com um significado decorrente da visualização. Esta exprime um modo de ver, entre vários outros possíveis. No segundo caso, há uma explicação em linguagem corrente que legitima a generalização, e que também decorre de um modo particular de ver o padrão.

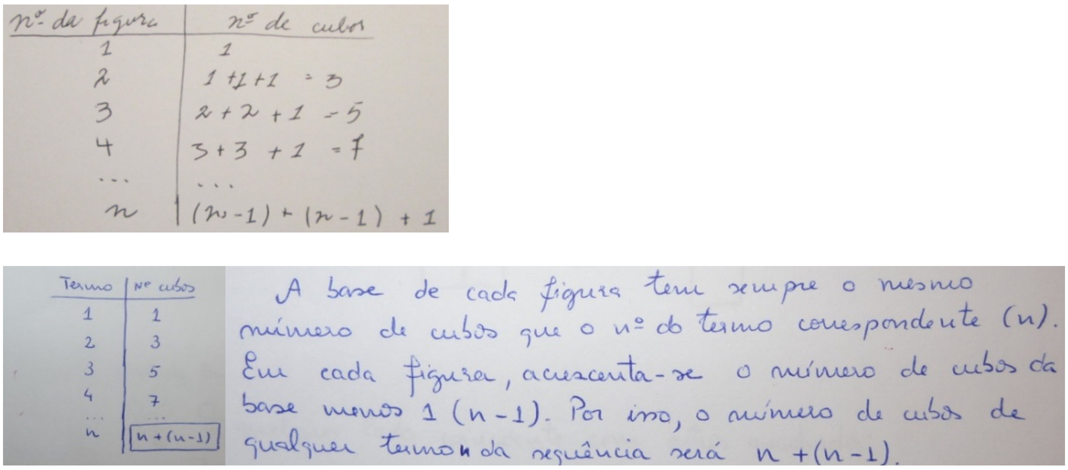

Figura 3. Expressões decorrentes da visualização

Stylianides e Silver (2010) defendem, como se depreende, que a estrutura fornecida pela representação figurativa da sequência, desde que o modo como ela é construída esteja univocamente determinado, pode garantir e justificar a lei descoberta. Ou seja, a estrutura matemática do padrão fornecida pela figura e pelo enunciado, que torna o padrão definido, dispensa a testagem da conjetura em mais dados que constitui o raciocínio indutivo. E nestes casos podemos confiar no padrão descoberto sem a necessidade de analisar casos particulares.

Este artigo constituiu motivo de reflexão sobre o nosso trabalho com padrões, pois levanta a questão, já por nós colocada, de saber se o que se desenvolve com apoio da argumentação visual constitui uma prova, isto é, se é raciocínio dedutivo. A tarefa de descoberta de padrões em números poligonais ou figurados realizada por uma turma de alunos de um curso de formação de professores de educação básica e por nós descrita (Pimentel & Vale, 2012) levanta essa mesma questão. Depois de trabalharem a sequência figurativa dos números triangulares e não terem conseguido produzir uma generalização algébrica (para qualquer termo da sequência) os alunos foram confrontados com a sequência figurativa dos números retangulares e conseguiram concluir que cada número triangular é metade do número retangular correspondente. Afirma-se a propósito: “Esta generalização foi verificada para alguns casos particulares, de modo a confirmar que “funcionava”, embora já tivesse sido produzida uma justificação visual” (p. 45). E ainda: “Pensamos que esta inferência é totalmente explicada pela visualização, podendo considerar-se, numa perspetiva não restritiva, tal como foi referido anteriormente, que constitui uma prova” (p. 46).

A Concluir

O trabalho que temos vindo a realizar no âmbito da resolução de tarefas de padrões permite afirmar que é um dos possíveis caminhos para o desenvolvimento do raciocínio indutivo, incluindo a formulação de conjeturas, a generalização e a explicação. Com este artigo procuramos encontrar evidência de que em determinadas circunstâncias, quando se utilizam padrões figurativos definidos (Stylianides & Silver, 2010), a estrutura matemática conferida pelo arranjo explica e justifica a generalização feita, podendo constituir aquilo que alguns autores (Cañadas & Castro, 2005; Jones & Herbst, 2012) designam por prova informal. Deste modo, o trabalho com padrões pode ser um contexto atrativo para que professores e alunos iniciem a abordagem da prova.

O raciocínio é um tema que, apesar de não ser novo em educação matemática, ainda necessita de reflexão sobre os modos como é abordado. Uma possível forma de abordagem consiste na identificação de tarefas adequadas ao nível dos alunos para o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio.

Referências

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215–241.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 420-428. Rzeszow: ERME.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2005). *Inductive reasoning in the justification of the result* of *adding two even numbers*. Paper presented at the *CERME* 5, acedido em 20 de Janeiro http://funes.uniandes.edu.co/1605/1/CERME5.pdf

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, *23*, 167- 180.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 191- 214). Dordrecht: Springer.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (Eds.). (1989). Visualization in the mathematics curriculum [Special issue]. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1 & 2).

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. in L. Puig & A. Guttierez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , vol. 1 (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. *Teaching and learning geometry 11-19*, 55-56. London, UK: Royal Society.

Jones, K. & Herbst, P. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and Contexts. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 261-278). Dordrecht: Springer.

Lin, F., Yang, K., Lee, K., Tabach, M. & Stylianides, G. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and Contexts. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 305- 326). Dordrecht: Springer.

Lithner, J. (2008). A framework for analyzing creative and imitative mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67, 3, 255-276.

Lannin, J., Ellis, A. & Elliot, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten - Grade 8.* Reston, VA : NCTM.

Lowrie, T. (2012). Visual and Spatial Reasoning: The *Changing* Form of Mathematics Representation and Communication. In B. Kaur & T. Lam (Eds), *Reasoning, communication and connections in mathematics. Yearbook 2012*, (pp. 149-168). Singapore: Association of Mathematics Educators.

Mariotti, M. (2010) Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 169-189). Dordrecht: Springer.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa, APM, 2007].

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. Quadrante, Vol. XXI, Nº 2, 29 – 50.

Pimentel, T. (2011). Um programa de formação contínua e o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores do 1.º ciclo do ensino básico. EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, pp. 3–26*. 7-8 Maio, 2011.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Vol.2: Patterns of plausible inference*. New Jersey: Princeton University Press.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), 37-62.

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: complexities and complicities in patterning activity. *For the learning of mathematics, 28, 1 (march, 2008)*. FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26,* 140-155.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Stein, M., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, *2*, 50-80.

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 38*, 289-321.

Stylianides, G. & Silver, E. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics: The Case of Pattern Identification In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades - A K–16 perspective*, (pp 235-248). New York: Routledge and Reston: NCTM.

Thompson, P. W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. P. Steffe, B. Greer, P. Nesher, P. Cobb & G. Goldin (Eds.), *Theories of learning mathematics* (pp. 267-283). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vale, I. & Pimentel, T. (2010). From figural growing patterns to generalization: a path to algebraic thinking. In M.F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4,* pp. 241-248. Belo Horizonte, Brasil: PME.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualisation in teaching and learning Mathematics.* Washington: Mathematical Association of America.