UM MODELO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

Magda Nunes Pereira – *Agrupamento de Escolas de Almeida*

magdanunespereira@gmail.com

Manuel Joaquim Saraiva – *Universidade da Beira Interior* e *UIED*

manuels@ubi.pt

Resumo: Nesta comunicação apresentamos um modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções, que construímos e implementámos com o intuito de ajudar o professor a criar e gerir contextos que promovam a eficiência da aprendizagem do conceito de parâmetro em funções no ensino secundário, impulsionando a estruturação do raciocínio matemático dos alunos. Neste modelo, os significados dos alunos são analisados sob critérios de relevância, coesão e coerência algébrica (significados de grau 0, 1, 2, e 3), num contexto de ensino-aprendizagem organizado em três níveis – 1.ºNível: Operacional de Referência, 2.ºNível: Operacional Informal, 3.ºNível: Estrutural. Os significados vão-se estruturando sob os 4 graus definidos, em cada um dos níveis e em todos os níveis. Os níveis são considerados como contextos que promovem a criação de conjuntos de significados, em que o terceiro contém o primeiro e o segundo e, por sua vez, o segundo contém o primeiro. A metodologia usada no estudo é qualitativa interpretativa e os resultados indicam que quando o professor enquadra os significados dos alunos num nível adequado, pode promover nos alunos a estruturação do raciocínio, através da atribuição de novos significados, permitindo a passagem ao nível de aprendizagem seguinte.

Palavras-chave: Funções; parâmetros; graus de significados; níveis de ensino-aprendizagem; raciocínio matemático.

Introdução

Os alunos apresentam, em geral, dificuldades na aprendizagem de parâmetros, quer quando estudam a sua variação numa família de funções, quer quando resolvem problemas e investigações que envolvem parâmetros e funções. A interpretação que os alunos fazem dos símbolos que representam parâmetros em funções é, muitas vezes, desprovida de significado algébrico, e muitos alunos manifestam dificuldades em estabelecer conexões entre os raciocínios que constroem.

De acordo com D'Amore (2006), um objeto matemático é tudo o que se denota e se atribui significado quando se trabalha em Matemática. Segundo Kaput (1999), o *pensamento algébrico* pode ser entendido como a capacidade de interpretar e de usar com criatividade os objetos matemáticos na descrição, interpretação e resolução de problemas algébricos, quer através da escolha dos símbolos adequados a cada situação, quer na sua manipulação e conversão. Este autor definiu componentes das quais diz depender o pensamento algébrico: capacidade de cálculo, trabalho com estruturas matemáticas e uso de símbolos algébricos na resolução de problemas.

A transição que os alunos fazem da Aritmética para a Álgebra tem preocupado muitos educadores matemáticos (Sfard, 1992; Kieran, 1992; Rojano, 2002; Arcavi, 2006). Para muitos deles, tal como para os autores desta comunicação, parte da estrutura e do simbolismo algébrico podem ser construídos a partir da experiência dos alunos com contextos operacionais aritméticos, realçando os aspetos estratégicos e intuitivos (NCTM, 2007; Guzmán, 1996), e conduzindo o aluno à construção de expressões algébricas mais genéricas e estruturadas.

No estudo em que se baseia esta comunicação é defendida a ideia de que a resolução de problemas estimula o desenvolvimento do raciocínio matemático e desenvolve a criatividade. Por sua vez, é assumido que, a resolução de tarefas de exploração e de investigação matemática "permite a formulação de conjeturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição, promovendo a procura de argumentos que demonstrem as conjeturas (...) e levantando novas questões para investigar" (Silva *et al.*, p.71). Assume-se, ainda, que inserir na aula tarefas de exploração e de investigação, devidamente selecionadas, conjuntamente com tarefas de outro tipo, tais como os problemas e os exercícios, pode facilitar o desenvolvimento de raciocínios e a aprendizagem de processos matemáticos, nomeadamente os algébricos (Pereira e Saraiva, 2008).

Contudo, há questões pertinentes, como as que se seguem, inerentes ao pensamento algébrico, e às quais se procurará dar resposta nesta comunicação:

> Como é que o professor gere e enquadra os significados dos alunos de modo a impulsionar a criação de novos significados e a estruturação do raciocínio matemático durante a aprendizagem de parâmetros em funções?
>
> Que representações matemáticas os alunos usam, e como as usam, para comunicar o seu raciocínio, quando aprendem o conceito de parâmetro em funções?

Nesta comunicação começamos por definir o modo de construção do pensamento algébrico dos alunos que nos norteou na construção do modelo em causa. Posteriormente, descrevemos sucintamente o uso da metodologia do estudo, ainda em curso. Em seguida, apresentamos alguns resultados do estudo e, por fim, algumas conclusões.

A construção de um modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções

D'Amore (2006) definiu objeto matemático como sendo tudo o que se denota e tudo a que se atribui significado, quando construímos, comunicamos e aprendemos matemática, tal como: a linguagem (termos, expressões, notações, registos orais, gestuais e escritos), um conceito, uma ação (algoritmo, procedimento, operação), um argumento (dedução, indução, validação), entre outros.

Uma *função* pode ser representada por uma tabela, por um gráfico ou por um problema em linguagem natural, pode ser interpretada pela variação dada por expressões analíticas, por tabelas e gráficos, e pode ser manipulada, através de tratamentos algébricos como a factorização, a substituição, a determinação de valores, como os zeros, os máximos/mínimos, entre outros valores (Ursini e Trigueros, 2004).

Consideramos *parâmetro* como um objeto matemático que, quando substituído por valores numéricos, identifica cada um dos elementos de uma determinada função ou família de funções. Numa função, um parâmetro é representado por um símbolo (uma letra, por exemplo) que assume diferentes significados, dependendo do contexto algébrico em que se insere (Arcavi, 2006; Pereira e Saraiva, 2008).

A semiótica é uma área do saber em que se estuda o modo de dar significado a tudo o que nos rodeia, quando pensamos e damos significado a algo – o que designamos de *representação de um significado*. De acordo com Duval (2006) as representações permitem: *representar* – num registo de representação simbólica, num registo de representação em linguagem natural, num registo de representação gráfica, num registo de representação esquemática, entre outros; *tratar* – através da manipulação de significados dentro do mesmo registo de representação, como por exemplo, a simplificação algébrica de uma expressão, entre outros modos de tratamento; e *converter* significados entre dois ou mais registos de representação, como, por exemplo, converter uma expressão algébrica na sua representação gráfica. Para Duval há dois tipos de representações: as semióticas e as não semióticas. As não semióticas são representações de significados mentais, caracterizadas por ideias ou crenças que uma pessoa tem acerca de um objeto ou de uma situação; são representações inconscientes, caracterizadas pela execução automática de uma tarefa, pelos significados que se atribuem sem pensamento, ou sem consciência. As representações semióticas representam significados mentais, são caracterizadas pela atribuição de significados ao objeto que se tem em mente e no qual se está a pensar, atribuindo significados que se entrelaçam a outros já construídos. Contudo, para Duval, a atividade matemática só começa quando se inicia o confronto de significados entre, pelo menos, dois registos de representação sobre o mesmo objeto matemático.

Referindo-se à Álgebra, Usiskin (1988) apresenta-a sob diferentes perspetivas: *como aritmética generalizada*; *como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*; *como o estudo de relações entre quantidades*; e *como o estudo de estruturas*. Recorrendo ao conceito de representação semiótica definido por Duval (2006), podemos dar as seguintes interpretações às perspetivas da Álgebra apresentadas por Usiskin: i) *álgebra como aritmética generalizada* por que, por exemplo, se atribui significado ao converter simbolicamente propriedades entre registos de representação semiótica – tal como a propriedade comutativa da adição representada num registo de representação aritmético por $3+5=5+3$ ser representada algebricamente por $a+b=b+a$; ii) *álgebra como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* por que, por exemplo, se atribui significado ao converter um problema representado num registo de representação em linguagem natural para um registo de representação em linguagem algébrica – tal como "quando adicionamos 3 ao produto de 5 por um número e obtemos 40, de que número se trata?" ser representado algebricamente pela seguinte equação $3+5x=40$; iii) *álgebra como o estudo de relações entre quantidades* por que, por exemplo, na relação entre a área de um retângulo (representada num registo de representação simbólica por A) e o seu comprimento e a sua largura (representadas num registo de representação simbólica respetivamente por C e por L) ser representada algebricamente por $A=C\times L$; iv) *álgebra como o estudo de estruturas* pelas representações associadas ao estudo de grupos, espaços vetoriais, entre outras estruturas algébricas.

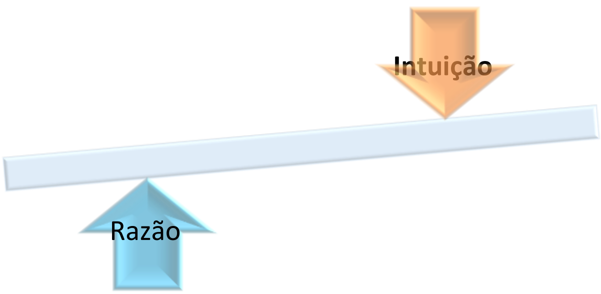
Gravemeijer (2005) definiu três níveis da atividade matemática dos alunos – de referência, genérica e formal. Na primeira o aluno atribui significados a situações concretas, atua na situação específica do problema que lhe é proposto e cria um modelo para aplicar e resolver o problema com que é confrontado, ao que Gravemeijer designa por *modelo/de*. Na atividade genérica o aluno trabalha com as relações matemáticas que estão envolvidas no problema, cria um modelo para resolver esse problema, mas aplica-o (ou consegue aplicá-lo) a outros problemas análogos, ao que o autor designa por *modelo/para*. Na atividade formal a atividade matemática do aluno torna-se independente da criação de um modelo que requeira aplicação; o aluno não necessita de recorrer a modelos, ou a problemas análogos que já resolveu.

Sfard (1992) definiu *conceção operacional* e *conceção estrutural* como estádios da aprendizagem. Na conceção operacional um conceito matemático, tal como o conceito de função (por exemplo), é considerado como um procedimento, como um resultado ou como um processo. No caso da aprendizagem do conceito de função, Sfard caracterizou a primeira fase da conceção operacional, que designou de *fase de interiorização*, pelas manipulações algébricas efetuadas que são acompanhadas por representações mentais; e a segunda fase da conceção operacional, que esta autora designou de *fase da condensação*, como sendo caracterizada pela investigação que o aluno faz entre relações algébricas e gráficas (por exemplo) dessa dada função. Na conceção estrutural, um conceito (como o de função, por exemplo), é considerado como um conceito válido por si só, sem necessidade de aplicação para se tornar válido, o conceito tem a sua própria validade e existência. A conceção estrutural é, para Sfard, a terceira fase da aprendizagem, a que esta autora chama de *fase da reificação*, em que o aluno compreende as múltiplas representações que podem estar associadas a uma função (por exemplo) e compreende uma função como um objeto matemático com validade e existência própria.

Radford (2006), no âmbito da *Teoria da Objetivação*, considera que, na mediação de significados intervêm os gestos, os movimentos, a perceção, a linguagem, a interação sujeito-sujeito e sujeito-objeto, bem como a natureza e as formas de conhecer os objetos matemáticos. Nesta perspetiva, podemos associar os significados matemáticos à dialética razão-intuição. Para Malcolm (2007), a intuição e a razão trabalham em conjunto numa constante ação combinada. A intuição é a responsável pela produção de uma ideia e a razão esforça-se para a testar ou desenvolver. Deste modo, as palavras, tal como são escritas ou faladas, só desempenham um papel pertinente no mecanismo do nosso pensamento depois de terem sido trabalhadas e depois de se tornarem claras na nossa mente. Na perspetiva de Malcolm, que também é a perspetiva assumida pelos autores desta comunicação, a construção de significados conscientes pode ser considerada como um processo que conduz a outros significados relevantes e coerentes [significados pertinentes e que se organizam numa relação lógica], que dão origem a uma estrutura de significados relevante, coesa e coerente.

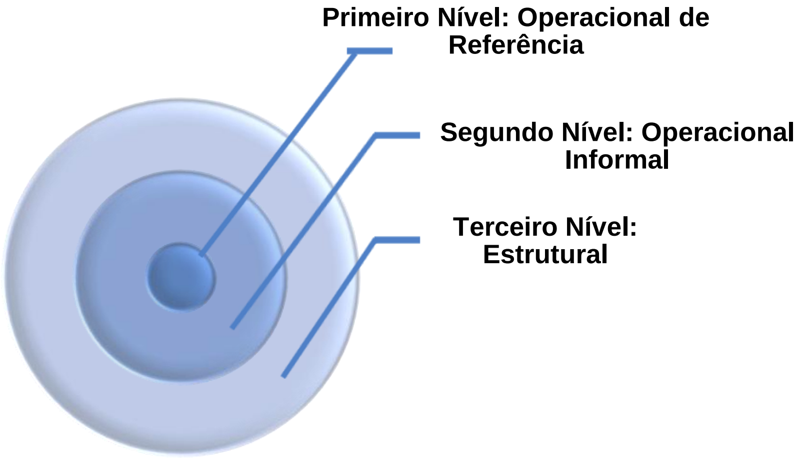
Sob esta dialética, Malcolm afirma que, quando tentamos colocar uma ideia em linguagem temos de nos colocar num outro plano intelectual, passando um vasto período de tempo a encontrar as palavras e as frases apropriadas. De facto, quando falamos de qualquer objeto do saber cada um de nós relaciona-o com uma representação mental do mesmo, podendo cada um de nós construir representações mentais diferentes face a esse mesmo objeto. Nesta perspetiva, uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interagir consigo próprio e com o mundo exterior, ao que Radford (2006) define como interações sujeito-sujeito e sujeito-objeto. Acresce também que, neste processo, ao nível do pensamento interno, há sinais pessoais próprios de cada indivíduo que marcam a sua forma de pensar e são estes os responsáveis pela construção de um conhecimento pessoal com sentido. É importante referir que, a visualização assume uma função importante, pois a visão, ao produzir modelos mentais, leva a que o suporte visual apropriado tenha efeitos positivos na compreensão dos alunos e na resolução de situações problemáticas (Dreyfus, 1991).

Nesta conjuntura, assumimos que os significados associados à dialética razão-intuição são os que promovem a capacidade que o aluno tem de dar significado a intuições e à gestão dessas intuições, de modo a construir significados relevantes e coesos, bem como de os direcionar para os objetivos definidos num determinado contexto algébrico, levando a que a intuição e a razão funcionem numa ação coerente.



Esquema 1: Representação esquemática da dialética razão-intuição.

No caso do modelo que construímos, *modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções*, consideramos que, tais significados associados à dialética razão-intuição, podem ser organizados em três níveis [1.ºNível: Operacional de Referência; 2.ºNível: Operacional Informal; 3.ºNível: Estrutural]. Em cada um dos três níveis e em todos os níveis, o aluno constrói um conjunto de significados que se organizam sob um contínuo processo gradual de estrutura. Consideramos que o primeiro nível está contido no segundo e, por sua vez, o terceiro contém o primeiro e o segundo. Esquematicamente, podemos sintetizar da forma que se segue os níveis do modelo que construímos:



Esquema 2: Níveis do modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções

<table>
<tr><th>1.ºNível: Operacional de Referência</th><th>2.ºNível: Operacional Informal</th><th>3.ºNível: Estrutural</th></tr>
<tr><td>O aluno dá significado a situações concretas e atua num contexto específico. Cria estratégias concretas que lhe permitem resolver uma situação específica.
O aluno reconhece as correspondências relacionadas entre as variáveis (dependente e independente), identificando e concretizando o(s) parâmetro(s) e as variáveis. O aluno usa, transforma e converte representações de parâmetros numa função, em contextos algébricos concretos.</td><td>O aluno trabalha com significados que já construiu no 1.º nível de ensino-aprendizagem e cria novas estratégias que se podem aplicar a novas situações. O aluno reconhece a variação comum das variáveis e do(s) parâmetro(s) envolvidos na(s) função(ões), para determinados valores que concretizam o(s) parâmetro(s) e valores genéricos das variáveis (dependente e independente). O aluno usa, transforma e converte representações de parâmetros em contextos algébricos mais genéricos que no(s) contexto(s) algébrico(s) do 1.ºNível.</td><td>O trabalho do aluno torna-se independente das situações específicas com que trabalhou nos 1.º e 2.ºníveis. O aluno constrói, deduz e relaciona, quer os significados que já construiu, quer novos significados.
O aluno usa, transforma e converte representações de parâmetros em contextos algébricos genéricos, onde atribui significados [ao(s) parâmetros e às variáveis dependente(s) e independente(s) das funções].</td></tr>
<tr><td colspan="2">O saber é considerado pelo aluno como o produto de um processo que ele aplica e utiliza aquando da resolução de uma dada situação.</td><td>O saber é considerado como uma estrutura de saberes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">O processo de aprendizagem é baseado na perceção humana, na ação e reflexão de significados em que as representações que o aluno faz (linguagem natural, gestos, emoções, ações, figuras, sistemas de notação, representações gráficas) bem como a conversão entre tais representações sustentam tal aprendizagem.</td></tr>
</table>

Tabela 1: Caracterização dos três níveis do modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções

Em linguística, a coerência e a coesão são dois conceitos importantes para a compreensão e escrita de um texto. A coesão de uma frase, ou de um texto por exemplo, é determinante para a articulação gramatical existente entre as palavras, as orações e frases, por forma a garantir uma boa sequenciação de ideias dessa frase, ou texto. A coerência, por sua vez, aborda a relação lógica entre as ideias, as situações ou os acontecimentos, dando ao leitor o sentido do conteúdo dessa frase ou texto. Complementarmente, a relevância das palavras é a qualidade que determina a pertinência, a importância, dessas palavras nessa frase, ou nesse texto, e que promovem a compreensão do conteúdo. Neste modelo que construímos, assumimos que, um *significado relevante* é caracterizado pela sua pertinência algébrica, ou seja, pela significação do que deve ser mais valorizado num contexto que envolve parâmetros em funções, ou seja, pela significação do que é fundamental, importante, principal, central e de significação indispensável. Assumimos ainda que, um *significado coerente* é caracterizado pela conformidade algébrica, ou seja, pelo modo como se articula, se harmoniza e não se contradiz com os outros significados algébricos já construídos, pelo modo lógico e equilibrado de se relacionar e complementar com os restantes significados. E assumimos também que um *significado coeso* é caracterizado pela manifestação algébrica explícita da relevância e da coerência, ou seja, um significado coeso constrói-se através da conexão sequencial de significados algébricos. Contudo, os significados coerentes e coesos são significados distintos, porque pode ocorrer uma sequência de significados coesos isolados que, se não forem combinados entre si, não têm condições para formar um novo significado algébrico coerente. Mas, se tais significados coesos forem entrelaçados entre si, formam um novo significado algébrico coerente – originando uma *estrutura de significados* e promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Entendemos *pensamento algébrico* como a capacidade de dar significado e usar os objetos matemáticos num *continuum* e progressivo processo de relevância, coesão e coerência algébrica, procurando ligação e harmonia entre tais objetos matemáticos. Consideramos que~~,~~ o desenvolvimento do pensamento algébrico depende deste *continuum* – quer na descrição, interpretação e resolução de situações, problemas, explorações e investigações, quer na justificação, demonstração e comunicação de resultados.

Por exemplo, no estudo com parâmetros em funções podemos dar significado algébrico à representação simbólica de uma dada família de funções para um determinado intervalo de valores do parâmetro; paralelamente, podemos dar significado algébrico às representações gráficas que se obtêm da família de funções com a variação desse parâmetro nesse mesmo intervalo de valores. Podemos considerar que ambos os significados assumem relevância no estudo dessa família de funções. E que ambos os significados apresentam, interna e isoladamente, coesão e coerência. Porém, se pretendermos converter essas representações simbólicas nas respetivas representações gráficas, precisamos de criar novos significados relevantes, bem como nova coerência e nova coesão desses significados, aquando da conversão dessas representações.

No nosso modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções, defendemos que, para a construção de uma estrutura de significados é necessário e suficiente a construção de significados construídos pelo aluno em cada um dos três níveis, num *continuum* e progressivo processo de relevância, coesão e coerência, que a seguir sintetizamos em *graus de significados*:

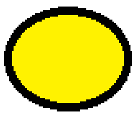
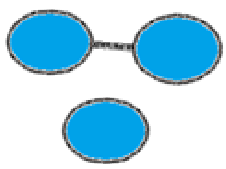
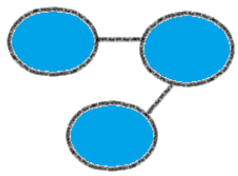
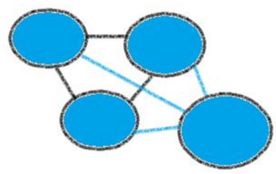
Significados de Grau 0	Significados de Grau 1	Significados de Grau 2	Significados de Grau 3
Significados construídos pelo aluno num registo de representações não semiótico. Significados sem contextualização do parâmetro numa relação funcional. Significados resultantes de uma crença ou perceção automática e sem relevância, sem coesão e sem conexão nem coerência com outros significados já construídos.	Significados construídos pelo aluno num registo de representações semiótico. Significados atribuídos ao parâmetro numa relação funcional, construídos pelo aluno com consciência, num ou entre vários registos de representação semiótica, mas sem construção de uma relação lógica e coerente entre eles e sem formação de uma estrutura coesa que traduza sequenciação, conexão e harmonia de significados algébricos.	Significados relevantes construídos pelo aluno num registo de representações semiótico, com algum grau de coerência e de coesão. Significados atribuídos ao parâmetro numa relação funcional, representados com alguma harmonia e conexão entre outros significados já construídos, num ou entre vários registos de representação semiótica.	Significados estruturados. Significados atribuídos ao parâmetro numa relação funcional, conectados com outros significados já construídos, num ou entre vários registos de representação semiótica. Significados com contextualização do parâmetro numa relação funcional, evidenciada na(s) representação(ões), que podem traduzir perceções automáticas devido à elevada relevância, coesão e coerência de significados construídos.
Significados sem relevância, sem coesão nem coerência algébrica.	**Significados com alguma relevância, coesão e coerência interna, mas sem relevância, coerência e coesão que os interligue, sequencie e harmonize algebricamente.**	**Significados com relevância, coesão e coerência interna, e com alguma relevância, coerência e coesão que os interliga, sequencia e harmoniza algebricamente.**	**Significados com relevância, coesão e coerência interna, que se traduzem em interligação, sequenciação, harmonização algébrica, formando uma estrutura de significados.**
			

Tabela 2: Graus de significados definidos no modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros em funções

Metodologia

A metodologia de investigação assumida no estudo que serviu de base a esta comunicação é qualitativa e interpretativa (estudos de caso). A professora que implementou o modelo de ensino-aprendizagem de parâmetros numa relação funcional é em simultâneo a investigadora (a primeira autora da comunicação). O modelo foi implementado em sala de aula numa turma de alunos do ensino secundário, 11.ºano, ao longo de um trimestre letivo, aquando do estudo do tema *Funções*. Foram constituídos, dentro da turma, dois grupos com dois alunos cada grupo, tratando-se de uma investigação com dois estudos de caso (cada grupo de alunos constituiu um caso de estudo). A escolha dos alunos e a formação dos grupos foi feita tendo em conta diferentes desempenhos e diferentes níveis de empatia pela disciplina. Cada par de alunos que constituiu cada estudo de caso continha um aluno de alto desempenho e outro de desempenho médio; e analogamente em relação à empatia pela disciplina. A recolha de dados foi feita com base em: 5 tarefas de investigação [construídas para a proposta pedagógica do estudo e implementadas em aulas de 90 minutos para a resolução e mais 90 minutos para a discussão heurística na turma; 3 grupos de questões adaptadas para testes de avaliação escritos; diálogos entre os alunos (com registos e reflexões da professora-investigadora, durante e após as aulas); entrevistas semiestruturadas aos dois grupos de alunos do estudo de caso, antes (pré-entrevista) e após a implementação da proposta pedagógica.

Quer as tarefas de investigação construídas, quer as tarefas adaptadas para os testes de avaliação e para as entrevistas, foram construídas no estudo, de modo concordante com os três níveis definidos no modelo de ensino-aprendizagem em causa. Em todas as tarefas da proposta pedagógica, o enunciado das questões é genérico, descreve e contextualiza a situação. Não há valores concretos no enunciado. O enunciado é frequentemente acompanhado de um esquema que tem o intuito de produzir uma imagem mental que contextualize a situação. Na(s) primeira(s) questão(ões) propõe(m)-se ao aluno que concretize numericamente o(s) valor(es), usualmente o(s) valor(es) do(s) parâmetro(s). Em seguida, as questões são formuladas de modo a propor ao aluno que represente, transforme e converta as representações que ele próprio vai construindo na resolução da tarefa, mas recorrendo a valores genéricos para representar a variável dependente e a independente. Na(s) última(s) questão(ões) das tarefas, propõe-se ao aluno que trabalhe na situação com valores genéricos das variáveis dependente e independente e do(s) parâmetro(s).

Para trabalharmos os dados recolhidos no estudo, criámos categorias de significados para a análise das representações. Tais categorias obtêm-se do cruzamento dos três níveis de aprendizagem com os quatro graus de significados, do seguinte modo (ver tabela 4):

Significados semióticos relevantes, coesos e coerentes associados à dialética intuição-razão.	**Grau 3**	***N1G3***	***N2G3***	***N3G3***
	Grau 2	***N1G2***	***N2G2***	***N3G2***
	Grau 1	***N1G1***	***N2G1***	***N3G1***
Significados não semióticos	**Grau 0**	***N1G0***	***N2G0***	***N3G0***
		Primeiro Nível: ***Operacional de Referência***	**Segundo Nível:** ***Operacional Informal***	**Terceiro Nível:** ***Estrutural***

Tabela 3: Categorias de análise das representações dos significados construídos pelos alunos

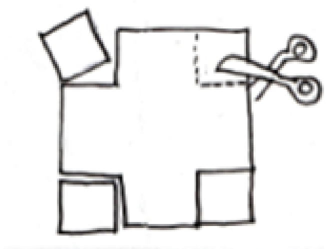
Resultados

Usualmente, em todas as tarefas da proposta pedagógica, o primeiro grupo de questões das tarefas foi construído sob o primeiro nível do modelo, Nível Operacional de Referência. O grupo seguinte de questões das tarefas da proposta pedagógica foi construído sob o segundo nível do modelo, Nível Operacional Informal. O último grupo de questões das tarefas da proposta pedagógica foi construído sob o terceiro nível do modelo, Nível Estrutural. Apresentamos a seguir como exemplo a *Tarefa 4, A caixa de volume máximo* (ver figura 4), onde a questão 1.1, que é a que foi construída sob o Nível 1.

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Tarefa: *A caixa de volume máximo*

"Pretendemos construir uma caixa e dispomos de um pedaço de cartão quadrado. Para tal, cortamos aos quatro cantos do cartão quadrados iguais. Que modelo matemático nos permite maximizar o volume da caixa, dependendo do lado do quadrado cortado?"



1. Começa por um valor concreto para o lado do cartão:

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões da caixa (largura, comprimento e altura) com o seu volume – começa por explorar a situação concretizando valores possíveis para o lado do quadrado cortado, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um o modelo matemático que nos permita calcular o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?

1.3. Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora que o cartão tem p *cm* de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado.

Figura 1: Enunciado da Tarefa 4, *A caixa de volume máximo*

Nesta questão pede-se ao aluno que dê significado à situação e que atue num contexto específico, atribuindo um valor concreto ao parâmetro. Os dois grupos de alunos (dos dois estudos de caso) começaram por atribuir um valor concreto ao lado do cartão, [12 cm (N1G1) e x cm ao lado do quadrado cortado, N2G1] – esta significação algébrica foi fundamental, pois permitiu-lhes relacionar a representação esquemática (que consta do enunciado) com o significado que atribuíram a esse mesmo enunciado representado em linguagem natural. Contudo, foi comum entre os vários grupos de alunos da turma ouvir-se, nesta fase inicial da resolução da tarefa, o seguinte comentário "… Ah! Já estou a perceber o que é que se quer! Se o cartão tiver 12 cm de lado, por exemplo, podemos cortar-lhe os cantos com vários tamanhos…". Esta significação (N2G2) foi indispensável para a construção da representação que os alunos fizeram ao confrontarem os dois tipos de representação do enunciado (esquemática e linguagem natural) com o novo significado que construíram e representaram num registo de representação geométrica, como mostra a figura 2 (representação de significados N2G3):

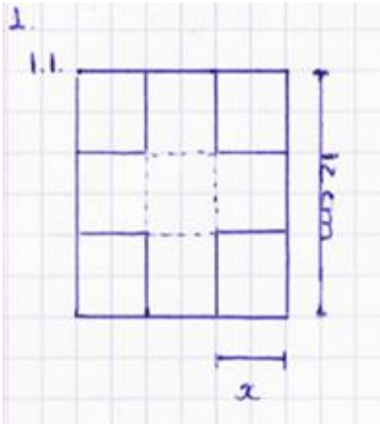


Figura 2: Representação de significados N1G1 e N2G3

Habitualmente, a segunda questão (ou o segundo grupo de questões, de todas as tarefas da proposta pedagógica) é feito sob o segundo nível de ensino-aprendizagem do modelo, Nível Operacional Informal – no caso da *Tarefa 4*, as questões 1.2 e 1.3 são as que foram construídas sob este nível. Nesta questão, os alunos dos dois estudos de caso trataram as representações que construíram (simplificando a expressão algébrica), após terem dado significado à expressão que representa o volume da caixa (N2G3), como mostra a figura 3.

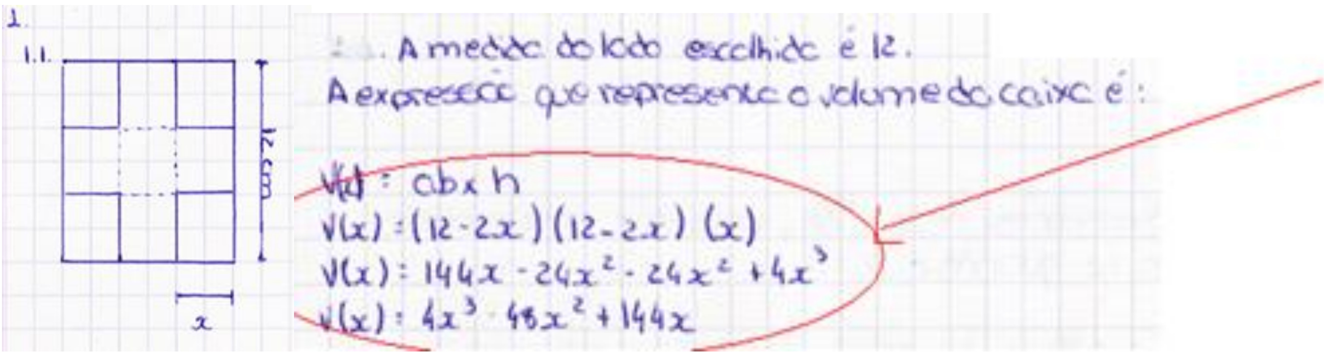


Figura 3: Representação, tratamento e conversão de significados do tipo N2G3

A representação destes significados permitiu-lhes explorar na calculadora gráfica novos significados relevantes, como os que resultaram da exploração gráfica da função $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ (N2G3) – tal como o significado dado ao valor do lado do quadrado cortado que maximiza o volume da caixa, e respetivo volume máximo, bem como a sua associação ao maximizante e ao máximo da função $V(x)$, no contexto algébrico em causa. O enquadramento da visualização do gráfico na calculadora também gerou significados (N2G1, N2G2 e N2G3) representados em linguagem natural (quer nas discussões orais, quer nas justificações que os alunos apresentaram por escrito). Tais significados foram relevantes para a criação de novos significados, que enquadram de modo coerente e coeso os significados dados ao parâmetro *p*, no nível de ensino-aprendizagem seguinte – questão 2.

O procedimento habitual na construção da última questão das tarefas (ou do último grupo de questões) é feito sob o terceiro nível do modelo, Nível Estrutural, que neste caso é a questão 2. Esta questão foi construída com o intuito de levar o aluno a atribuir significados que se enlacem no contexto da situação de maximização do volume da caixa, mas sem os fazer depender totalmente da significação feita nas questões anteriores.

Aqui, os alunos dão significado ao parâmetro e à sua variação, independentemente do valor concreto atribuído inicialmente, e trabalham com os valores genéricos das variáveis dependente e independente. Na resolução desta questão, alguns alunos da turma, bem como os alunos de um dos dois grupos dos estudos de caso, continuaram a apresentar representações, tratamento e conversão entre, e em vários, registos de representação – facto que traduz a construção de significados N3G3 do seu pensamento algébrico, tal como mostra a discussão em torno do comprimento do lado da caixa em função de *p* e de *p/2* (ver figura 4).

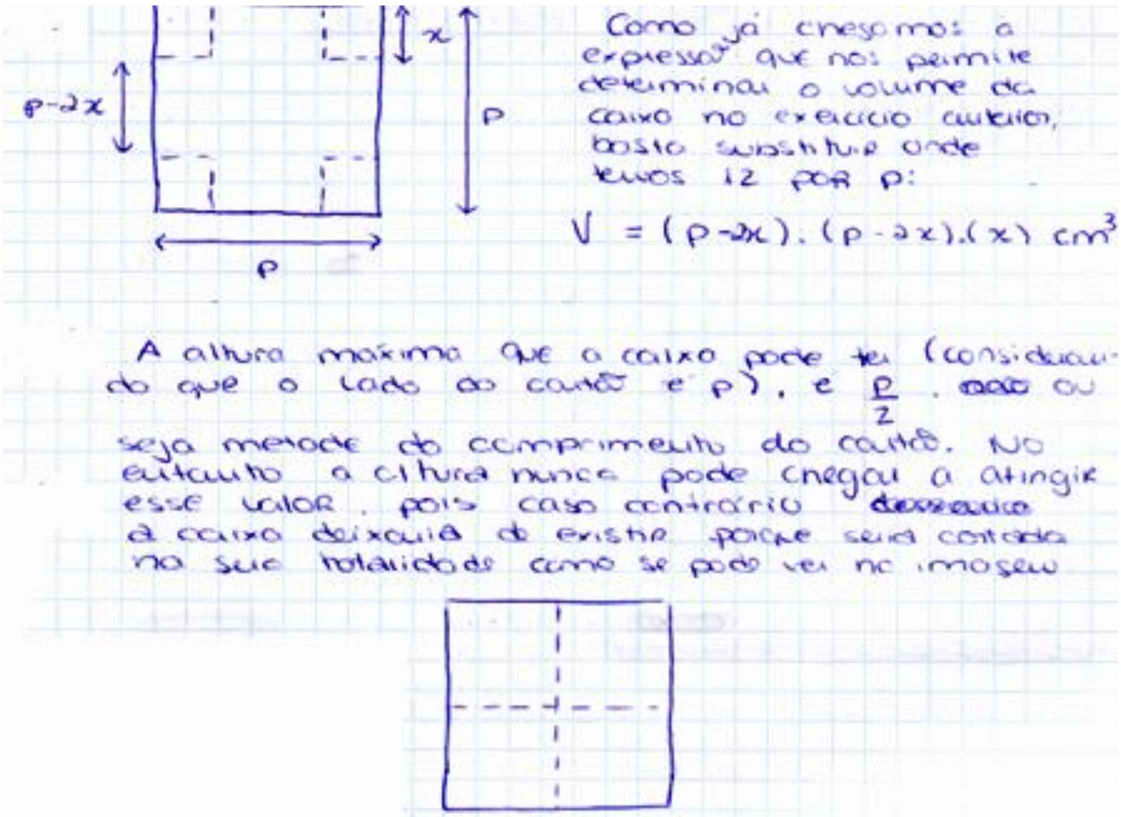


Figura 4: Representação, conversão e tratamento de significados do tipo N3G3

Conclusões

Os significados que os alunos dão no seu raciocínio algébrico, ao longo dos três níveis do modelo de ensino-aprendizagem, são o resultado da relevância, coesão e coerência de significados que vão fazendo ao longo resolução de situações, problemas, explorações, investigações e justificações – o que resulta na estruturação gradual do seu pensamento algébrico.

A implementação deste modelo ajuda o professor a atuar em situações em que os alunos precisam de ganhar consciência nos significados que constroem e na dialética que estabelecem entre a intuição e a razão, sobre o que pensam e o que representam, e sobre o que vão fazer. Por outro lado, quando o professor enquadra os significados dos alunos num nível de aprendizagem (como os que definimos no modelo que construímos) pode com maior facilidade ajudar os alunos a criarem o seu próprio sistema de significados relevantes, coesos e coerentes (levando-os, por exemplo, a regredirem ao nível de aprendizagem anterior para que reforcem a estruturação de significados). Assim, os alunos atribuem novos significados e estruturam o seu raciocínio (sob signos de grau 3), na passagem ao nível de aprendizagem seguinte.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, A. P. Canavarro (Orgs.) *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores (pp. 29-48)*. Lisboa: SEM-SPCE.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.

D'Amore, B. (2006). *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido.* Relime, Número Especial de 2006 (pp.177-195).

Duval, R. (2006). *Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?* Relime, Número Especial de 2006 (pp.45-81).

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so dificult, and what can we do about it? Em L. Santos, A. P. Canavarro, J. Brocardo (Orgs.) *Educação Matemática: Caminhos e Encruzilhadas (pp. 83-101)*. Lisboa: APM.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. Em E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school álgebra. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 349-419). New York, NY: Macmillan.

Malcolm, C. (2007). Dividing the kingdom. Em Gellert, U & Jablonka, E. (Eds.), *Mathematisation and Demathematisation – Social, Philosophical and Educational Ramifications,* (pp.107-122). Roterdão: Sense Publishers.

Pereira, M. e Saraiva, M. J. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da Álgebra em alunos do 7.º ano de escolaridade. *Proceedings XII Simpósio de la Sociedad Española de Investigación Matemática/ XXVIII Encontro de Investigação em educação Matemática/ XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 517-527. Espanha: Faculdad de Educación de Badajoz.

Radford, L. (2006). *Elementos de una teoria cultural de la objectivación.* Relime, Número Especial de 2006 (pp.103-129).

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. Em L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and quandary of reification: The case of functions. Em E. Dubinsky and G.Harel (Orgs.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. e Abrantes, P. (1999). O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação. *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ursini, S. e Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, pp. 361-368.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school álgebra and uses of variables. Em A. F. Coxford & A. P. Schulte (eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp.8-19). Reston, VA: NCTM.