O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO BÁSICO

Corália Pimenta

Instituto Educativo de Lordemão

coraliapimenta@gmail.com

Manuel Joaquim Saraiva

Universidade da Beira Interior e *UIED*

manuels@ubi.pt

Resumo

A presente comunicação, que tem por base uma investigação ainda em curso com alunos dos 4.º e 5.º anos de uma escola básica portuguesa onde se procura estudar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, descreve e reflete a organização do raciocínio de um grupo desses alunos durante o processo de abstração e de generalização, promovido pela resolução de tarefas exploratórias que visavam estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. Pretende ainda identificar as dificuldades evidenciadas por esses alunos na transição da Aritmética para a Álgebra, bem como identificar aspetos que se tenham revelado propulsores do pensamento algébrico.

Usou-se uma metodologia qualitativa de cunho descritivo e interpretativo.

Os resultados indicam que mediante determinado contexto, subjacente às tarefas elaboradas, ao papel do professor na sua implementação, ao envolvimento dos alunos e à utilização de instrumentos auxiliares, estes alunos mais jovens conseguem fazer uso de simbologia própria e desenvolver linguagem algébrica que lhes permite estabelecer regularidades, fazer generalizações e, consequentemente, resolver problemas.

Palavras-chave: Tarefa exploratória; Pensamento algébrico; Abstração em contexto.

Introdução

Carraher e Schliemann (2007) consideram que a separação, tradicional, existente entre a Aritmética e a Álgebra, nos primeiros anos de escolaridade, não potencia o olhar sobre a Matemática e pode tornar mais difícil a futura aprendizagem da Álgebra. Por sua vez, Usiskin (1988) refere a existência de alunos com bom desempenho durante a aprendizagem dos números e respetivas operações, mas com resultados pouco significativos aquando da aprendizagem da Álgebra. Estas afirmações, também reconhecidas pelos autores da presente comunicação, levam-nos a considerar vantajosa a aplicação da proposta pedagógica *Early Álgebra* – que defende a familiarização dos alunos mais jovens (com idades compreendidas entre os 6 e os 12 anos) com conceitos algébricos que, ao serem apresentados em contextos significativos, facilitam a apreensão futura de outros mais profundos e complexos.

Neste sentido, e de acordo com a referida proposta, durante a nossa investigação valorizámos a aprendizagem contextualizada, realçando a importância das tarefas exploratórias implementadas, do ambiente de trabalho e da dinâmica existente entre professor e alunos.

Visando descrever como se organizou o raciocínio de um grupo de alunos do ensino básico, durante o processo de abstração e de generalização requerido na resolução das tarefas exploratórias, em contexto sala de aula, implementámos o modelo *AiC*, recorrendo-se à análise das três ações epistémicas *Recognizing*, *Building-with* e *Constructing*, com ênfase na consolidação.

Nesta comunicação descreve-se e reflete-se a organização do raciocínio de um grupo de alunos dos 4.º e 5.º anos de escolaridade durante o processo de abstração e de generalização, promovido pela resolução de tarefas exploratórias que visavam estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. Identificaram-se ainda dificuldades na transição da Aritmética para a Álgebra, bem como aspetos que se consideraram ser propulsores do pensamento algébrico.

As dificuldades dos alunos e o *Early Álgebra*

A Aritmética e a Álgebra são, atualmente, consideradas duas temáticas de relevo nos currículos de Matemática, ainda que a Álgebra seja valorizada, pela maioria dos países, apenas nos últimos anos do ensino básico, ou somente no ensino secundário. Tradicionalmente, a Aritmética antecede a Álgebra, por se considerar ser necessário um conhecimento prévio e consistente dos conceitos numéricos que permitam adquirir competências essenciais à aprendizagem de conceitos algébricos. Contrariamente a esta perspetiva, investigações recentes dão a indicação de que alguns erros e dificuldades manifestadas durante a aprendizagem da Álgebra podem ter sido promovidos, ou agravados, pela separação que comumente é efetuada entre as duas referidas áreas (Carraher e Schliemann, 2007). Surge assim a ideia de que havendo falta de ligação entre estas duas áreas da Matemática, nomeadamente no ensino ministrado, em que os alunos mais jovens não são estimulados a estabelecer relações entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas, ou seja, não é potenciado o seu pensamento algébrico, enfrentarão esses alunos maiores dificuldades durante a aprendizagem da Álgebra.

A perspetiva *Early Álgebra* surge como proposta curricular na qual se propõe introduzir a Álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, transversalmente, durante o ensino e aprendizagem das diferentes temáticas. Esta ideia resulta da análise e reflexão dos resultados de investigações (Bastable & Schifter, 2007; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000), promovidas na última década, onde se conclui ser necessário incorporar atividades de observação de regularidades, relações e propriedades matemáticas para que os alunos possam desenvolver competências algébricas. Acrescenta-se que a metodologia considerada adequada ao desenvolvimento das capacidades algébricas está relacionada com os ambientes de exploração e de modelação, onde os alunos deverão prever, discutir, argumentar e comprovar as suas ideias, não se prendendo unicamente com o treino de procedimentos. Segundo esta perspetiva, os alunos deverão desenvolver o pensamento algébrico, para além do numérico, desde o primeiro ciclo, estando a aprendizagem de conceitos associada à compreensão e não somente à memorização de procedimentos treinados. Em traços gerais, o *Early Álgebra* está associado ao estudo e à generalização de padrões e de relações numéricas, de relações funcionais, manipulação de símbolos e modelação. Kaput (1998, 2000) e Schliemann, *et al*. (2003) consideram ser necessário desenvolver junto de alunos, com idades compreendidas entre os seis e os doze anos, o raciocínio e as relações algébricas, comprovando através dos seus estudos que alunos dessas idades revelaram capacidade para resolver problemas algébricos, mesmo antes de conhecerem e fazerem uso de notação algébrica. Os autores desta comunicação também concordam com esta perspetiva.

Em Portugal, o *Programa do Ensino Básico* (ME, 2007) também valoriza esta perspetiva, ao dar indicações para se estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos que frequentam os primeiro e segundo ciclos, mediante a generalização de processos e representação em diferentes contextos. O interesse em introduzir esta corrente em Portugal tem surgido através da divulgação de alguns resultados de investigações recentes. Canavarro (2009), por exemplo, argumenta que a valorização do pensamento algébrico nos primeiros anos de ensino apresenta um *carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores* e contribui *para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber* (p. 13).

A compreensão do pensamento algébrico dos alunos – o modelo *AiC*

Relativamente ao raciocínio dos alunos, Dreyfus (2012) valoriza a construção do conhecimento matemático abstrato. Afirma também que o conhecimento científico não é um simples ato de ampliar a experiência do dia-a-dia, mas antes ele é um fruto de conexões internas de ideias que o fazem emergir, exigindo uma realidade enriquecida em vez de uma realidade empobrecida. Refere, ainda, o *método de ascensão do concreto* – a abstração inicia-se a partir de uma forma simples, vaga e pouco desenvolvida, muitas vezes com falta de consistência; o desenvolvimento da abstração tem origem numa análise, na fase inicial da abstração, e finaliza numa síntese, numa forma mais consistente e elaborada, não havendo, assim, uma passagem direta do concreto para o abstrato, mas antes a transição de uma forma pouco desenvolvida para outra mais desenvolvida. No sentido de aferir esse conhecimento Dreyfus (2012) refere-se ao referencial teórico e metodológico *Abstraction in Context* (AiC), através do qual também se valorizam o contexto social, curricular e os ambientes de aprendizagem no desenvolvimento do raciocínio e na construção do conhecimento. Segundo Dreyfus (2012), o processo de abstração decorre mediante três fases: *need* - a necessidade que o aluno sente em construir um novo conhecimento; *emergence* - o aparecimento de uma nova construção; e *consolidation* - a consolidação da nova construção. O processo de abstração corresponde, assim, a uma atividade de reorganização vertical dos constructos matemáticos já adquiridos pelo aluno, que são usados, pelo próprio, para adquirir uma nova construção matemática (Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus, 2001).

O processo de abstração observado em contexto sala de aula estará obviamente dependente das tarefas elaboradas, da forma como essas são apresentadas aos alunos, das ferramentas e do ensino ministrado, estando também relacionado com fatores de ordem social e psicológica. Esse processo de abstração implicará ações mentais através das quais é usado ou construído o conhecimento (ações epistémicas), que são de difícil observação e avaliação. Nesse sentido, torna-se indispensável adotar um referencial teórico que torne o processo de abstração observável. Segundo Dreyfus (2012), as construções dos alunos podem ser descritas e analisadas mediante três ações epistémicas: *Recognizing* (R) – refere-se à perceção que o aluno deverá ter quanto à necessidade de adquirir conhecimentos prévios que lhe facultem a resolução de novas situações problemáticas; *Building-with* (B) – retrata a necessidade do aluno atingir determinado objetivo, selecionando estratégias e justificando e/ou apresentando soluções para o problema, sendo esta uma etapa crucial para o processo de abstração matemática; e *Constructing* (C) – fase em que o aluno utiliza as construções prévias para produzir novas construções, podendo até não estar consciente da aprendizagem que está a ser concebida.

O processo *Consolidation* surge como consequência das três ações epistémicas supramencionadas, decorrendo da aplicação de procedimentos sucessivos para construção de conhecimentos, sendo por isso interminável. É nesta fase que os alunos se tornam mais conscientes das suas construções, tornando-se perspicazes, flexíveis e mais confiantes.

Entenda-se que durante a aplicação do modelo *AiC*, nomeadamente durante a elaboração e condução das tarefas propostas, os alunos constroem o novo conceito abstrato por recurso e reorganização de construções já adquiridas por si. A este processo Freudenthal (1973) chamou *Matematização Vertical*.

Face à estreita ligação existente entre os termos *raciocínio matemático* e *pensamento matemático*, este último deverá ser interpretado, nesta comunicação, como sendo um processo de exposição do raciocínio dos alunos. Pretende-se assumir a posição de Harel (2006), o qual considera que o raciocínio pode ser observado mediante diferentes formas de pensamento: i) previsão de resultados, muitas vezes essenciais para a formulação de conjeturas; ii) questionamento das soluções, mesmo as corretas; iii) identificação de padrões; iv) recurso a representações alternativas; v) análise dos resultados; e vi) na síntese das conclusões. Privilegiam-se também as indicações dadas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), coincidentes, em alguns aspetos, com as referidas por Harel: i) formulação e teste de conjeturas, demonstração e construção de cadeias argumentativas; ii) compreensão do significado de generalização - caso particular e contraexemplo; e iii) distinção entre raciocínio indutivo e dedutivo, bem como os diferentes métodos de demonstração.

Metodologia

Foi efetuada uma abordagem qualitativa, inserida no paradigma interpretativo, implementada por recurso a estudos de caso (Bogdan & Biklen, 1994). O processo de observação incidiu sobre alguns grupos de trabalho de três turmas do ensino básico, uma do quarto ano e duas do quinto ano. A investigadora, professora das turmas de quinto ano e primeira autora desta comunicação, assumiu as duas funções nas três turmas, registando-se uma observação colaborativa, durante a aplicação da tarefa, por parte de duas professoras estagiárias, nas turmas de quinto ano, e pela professora titular na turma de quarto ano. A recolha de dados concretizou-se através da observação e do diálogo mantido com os alunos no seu ambiente natural (observação participante), tendo-se procurado registar no diário de bordo da investigadora/professora (RP) e recolher através do registo vídeo (RV) todos os aspetos relacionados com o comportamento, postura e desempenho dos alunos durante a execução das tarefas. A primeira recolha de dados coincidiu com a apresentação e implementação da tarefa *Luzes de Natal*, prolongando-se durante noventa minutos tendo-se, posteriormente, recolhido os registos escritos dos alunos (RA). A segunda recolha de dados aconteceu uma semana depois, aquando da exposição de alguns resultados apresentados pelos alunos, previamente analisados pela professora. Nesta fase, com uma duração aproximada de quarenta e cinco minutos, promoveu-se a reflexão e discussão das respostas divulgadas, em contexto turma, intencionando-se a exposição e validação de raciocínios, para além do registo de conclusões.

A análise de dados incidiu sobre a informação recolhida e considerada pertinente, tendo em consideração o quadro teórico adotado - *AiC*. Os dados recolhidos foram organizados e analisados segundo as categorias *Recognizin*g, *Buildingwith*, *Construction, Consolidation* e *Matematização Vertical*.

As tarefas elaboradas pela investigadora e a sua posterior aplicação visaram fomentar, para além do desenvolvimento do pensamento algébrico, um processo de aprendizagem estruturado e progressivo estimulado pelo espírito investigativo decorrido em contexto sala de aula. Durante a sua construção atenderam-se às especificidades do contexto de aprendizagem, nomeadamente ao histórico dos alunos (perfil, dificuldades e idade cronológica) e ao ambiente de aprendizagem (tecnológico e curricular). Relativamente ao primeiro ciclo, a colaboração da professora da turma revelou-se essencial para ajustar a abordagem dos problemas às características dos alunos.

A aplicação das tarefas verificou-se em três momentos distintos: apresentação, realização em pequeno grupo e análise e discussão em contexto turma. O processo iniciou-se com a apresentação oral da tarefa à turma, por parte da professora/investigadora, por recurso a instrumentos audiovisuais (projeções/animações) que objetivaram conferir o reforço visual essencial à compreensão e ao incentivo à realização. Nesta fase, foi dada liberdade para o esclarecimento de dúvidas de interpretação e destaque ao papel que deveria ser assumido pelos alunos - envolvimento, capacidade de esforço, colaboração e comunicação com colegas e professora. O contacto com o enunciado foi reforçado através da distribuição da folha de enunciado, local onde os alunos expuseram o seu raciocínio. Durante o período que se seguiu, a professora/investigadora procurou recolher informações capazes de darem resposta às questões de investigação surgidas, procedendo, quando necessário, ao esclarecimento de dúvidas essenciais à progressão e à aquisição de novas construções.

Descrição do contexto e caracterização dos grupos turma

Os três grupos de turma onde incidiu este estudo são globalmente heterogéneos, tanto no que respeita aos conhecimentos matemáticos necessários à aprendizagem de novos conceitos, como também ao desenvolvimento de raciocínios e aplicação de estratégias necessárias à resolução de problemas. Nestas turmas destacam-se alunos com ritmos de compreensão e de execução distintos e outros com dificuldades específicas de aprendizagem. Contudo, a postura adequada do conjunto de alunos permite manter um ambiente de trabalho favorável à aprendizagem. A tarefa divulgada nesta comunicação, embora tenha sido dirigida a todos os alunos de cada uma das turmas, intencionou apenas uma análise detalhada dos resultados registados por determinados grupos de trabalho, definidos previamente, de acordo com as suas características. Algumas dessas resoluções serão divulgadas no capítulo dos resultados.
Ainda em relação à seleção e distribuição prévia dos alunos pelos diferentes grupos de trabalho, interessa referir que se procurava aferir de que forma os fatores contextuais poderiam influenciar o raciocínio algébrico dos alunos e a consequente construção do novo conhecimento. Por essa razão, características como conhecimento matemático do aluno, empatia com os colegas, ritmo de trabalho, motivação, postura, entre outras, foram tidas em consideração no momento de formação dos grupos de trabalho. Uma vez que as tarefas planificadas apresentam cariz exploratório, a professora/investigadora assumiu, durante a sua implementação, comportamentos diferenciados, procurando que cada etapa fosse percorrida pelos alunos de forma responsável, até que esses

construíssem o seu próprio conhecimento. Nesta comunicação analisaremos apenas os dados recolhidos relativamente à primeira tarefa – *Luzes de Natal*.

A tarefa Luzes de Natal

Com a aplicação desta tarefa, nas três turmas supracitadas, pretendeu-se observar de que forma os alunos constroem o conceito de mínimo múltiplo comum. Delinearam-se os objetivos: (1) Antecipar o contacto dos alunos com conceitos algébricos, promovendo a realização de tarefas com potencial algébrico, visando identificar dificuldades e reconhecer vantagens – *Early Álgebra*; (2) Estimular o desenvolvimento da compreensão significativa do conceito de Mínimo Múltiplo Comum; (3) Incentivar os alunos à resolução de problemas; (4) Expor o raciocínio, oralmente e por escrito, de forma compreensível; (5) Desenvolver a comunicação matemática, que se quer progressivamente mais formal; (6) Observar o processo de abstração dos alunos, segundo o *modelo AiC*.

Espectava-se observar os alunos a determinarem o mínimo múltiplo comum por recurso à representação dos respetivos múltiplos, a identificarem a regularidade numérica apresentada, bem como a concluir que o *Mínimo Múltiplo Comum* de dois ou mais números é o menor dos múltiplos comuns desses números, diferente de zero.

A tarefa foi apresentada sob a forma de Problema, iniciando-se com a questão: *Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?*

Na Matelândia, neste Natal, várias famílias enfeitaram as suas árvores com lâmpadas *pisca-pisca*, as quais existem em diferentes formatos.

No mercado estão disponíveis lâmpadas com a forma circular, triangular, quadrangular, entre outras, tendo cada família selecionado apenas um desses tipos para colocar na sua árvore.

Três amigos compraram, cada um deles, uma dessas lâmpadas e estão a procurar resolver alguns problemas que lhes foram colocados. Tenta ajudá-los, respondendo às questões que se seguem. Sabe-se que:

- *O TitoMat comprou lâmpadas com formato circular, as quais piscam de 6 em 6 segundos;*
- *A RitaMat comprou lâmpadas com formato triangular, as quais piscam de 9 em 9 segundos;*
- *O EduMat comprou lâmpadas com formato quadrangular, as quais piscam de 18 em 18 segundos.*

1. Considera que os três amigos começaram a cronometrar, ao mesmo tempo, durante 1 minuto, os instantes (segundos) marcados no seu cronómetro sempre que as luzes piscaram. **Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?**

TitoMat

RitaMat

EduMat

Fig. 1 – Tarefa *Luzes de Natal*

O problema foi estruturado de acordo com o que se entendeu ser um contexto significativo para os alunos em observação, tendo-se também procurado uma abordagem apelativa (*powerpoint*) e descritiva, por recurso a imagens que foram igualmente expostas nos enunciados entregues aos alunos. Procurou-se recriar uma situação aproximada da realidade, tendo o suporte informático contribuído para o efeito, para além de motivar os alunos à realização da tarefa.

Fig. 2 – *Luzes de Natal* (apresentação da tarefa)

A presença das personagens *TitoMat*, *RitaMat* e *EduMat*, reforçada através de imagens de crianças que aparentam ter idades aproximadas às dos alunos a quem se propôs a tarefa, procura também dar efeito do real ao problema colocado, para além de ter a intenção de facilitar a compreensão e estimular à resolução da tarefa. A resolução desta situação, de cariz exploratório, deverá ser entendida como um veículo de construção de novos conhecimentos, partindo de outros já consolidados pelos alunos. Foi implementada como se de um desafio se tratasse, procurando-se deixar presente a ideia de descoberta, instigando os alunos a generalizar, depois de seguirem determinado percurso onde aplicam conhecimentos prévios e dão resposta a questões intermédias. Nesta primeira tarefa, em que o formato é novo e os alunos ainda poderão, dadas as suas idades, ter pouca autonomia na seleção das estratégias mais adequadas à resolução do problema, optou-se por incentivar à utilização de tabelas, para organizar os dados divulgados e ajudar a reconhecer relações numéricas.

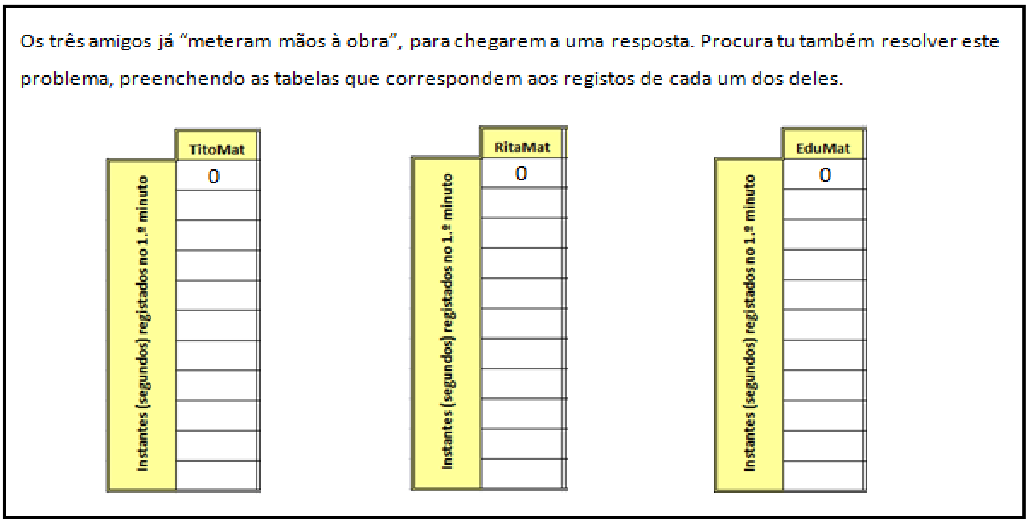


Fig. 3 – Organização de dados - Tabelas

As três questões que se seguem procuram estimular os alunos a observar e identificar regularidades presentes nas tabelas por si preenchidas, para que compreendam o sentido dessas semelhanças e tirem as suas próprias conclusões.

1.1. Observa a sequência numérica presente nas tabelas do TitoMat e do EduMat.

No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

1.2. Considera agora a sequência presente nas tabelas da RitaMat e do EduMat.

Quanto tempo foi necessário esperar para voltar a ver as respetivas lâmpadas a piscar ao mesmo tempo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

1.3. Observa em simultâneo as três tabelas. De quanto em quanto tempo piscaram as três lâmpadas em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados desta questão? Justifica.

Fig. 4 – Identificação de regularidades - Tabelas

Depois de identificada a regularidade presente nas tabelas foram colocadas questões diretas para o cálculo do mínimo múltiplo comum, procurando-se perceber se os alunos conseguiriam fazer uso do conhecimento já adquirido para generalizar a regularidade identificada.

1.4. Tendo em consideração as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, determina o mínimo múltiplo comum entre:

a) 6 e 18

b) 9 e 18

c) 6, 9 e 18

d) 5, 10 e 20

e) um número e o dobro desse número

Fig. 5 – Mínimo múltiplo comum

Após generalização da regularidade observada, espera-se, ao colocar a questão que se segue, que os alunos generalizem outras regularidades numéricas.

2. Observa, uma vez mais, os valores registados na tabela da RitaMat.

2.1. Quantas vezes, durante o primeiro minuto, piscaram as suas lâmpadas?
[Nota: não consideres o instante inicial]

2.2. Quantas vezes se espera que pisquem durante os primeiros dez minutos?

2.3. Completa a frase: *numa hora, as luzes da lâmpada da RitaMat piscam ___________ vezes.*

2.4. Preenche a tabela seguinte, indicando o número de vezes que piscariam as luzes caso estivessem acesas durante várias horas.
[Nota: não consideres o instante inicial]

Minutos	N.º de "*piscas*"
1	
2	
5	
10	
20	
30	
40	
50	
60	
m	

Fig. 6 – Regularidade numérica - generalização

Entende-se que através da resolução desta tarefa, os conceitos são adquiridos pelos próprios alunos quando, depois de explorarem situações aritméticas, reconhecem regularidades e generalizam relações funcionais (pensamento funcional) e padrões numéricos, formalizados por expressões algébricas (aritmética generalizada). A tarefa assume potencial algébrico quando os alunos conseguirem concluir que o (1) *mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor dos múltiplos comuns* (pensamento funcional) e (2) generalizar o número de piscas observados durante o primeiro minuto, a qualquer intervalo de tempo (aritmética generalizada). Reforce-se o facto de ter havido uma antecipação dos conceitos no quarto ano e uma abordagem diferenciada dos mesmos no quinto ano, uma vez que é solicitado o processo de generalização. Nesta atividade, a promoção do pensamento algébrico está associada às questões colocadas, em que se conduz o aluno a (1) identificar regularidades numéricas; levando-o a (2) compreender e estabelecer relações numéricas e a (3) generalizar propriedades, incentivando à transição para a aritmética generalizada, por exposição do seu raciocínio e utilização de linguagem abstrata simbólica.

Realização da tarefa na sala de aula

A introdução da tarefa

A primeira abordagem foi dinamizada com recurso à projeção, onde constavam o problema de investigação e as diferentes etapas a serem desenvolvidas. A professora explorou com os alunos, em grupo turma, os enunciados do problema, esclarecendo dúvidas, mas também clarificando que postura esperava que estes assumissem durante a realização da tarefa. Na perspetiva do aluno parece ter havido entendimento global, entusiasmo e ansiedade para que lhes fosse distribuída a tarefa em suporte papel. A investigadora classificou esta etapa de fundamental, face à motivação gerada no grupo de turma e ao entendimento do problema e da finalidade da tarefa.

Fig. 7 – Introdução da tarefa

Após distribuição dos enunciados pelos diferentes grupos de trabalho, os alunos seguiram, na sua globalidade, a leitura em voz alta do problema geral e das questões secundárias, discutindo em grupo o que estava a ser pedido. Nessa ação, a maioria dos alunos optou por selecionar um aluno para efetuar a leitura e outro para registar, por escrito, as respostas acordadas pelo grupo. Ainda assim, outros optaram pela partilha da leitura e escrita. Um grupo do quarto ano aproximou, ainda mais, a tarefa a um contexto funcional, recriando um modelo teatral da situação exposta.

A realização

Fig. 8 – Leitura e interpretação do problema

Os alunos iniciaram a sua investigação individualmente, em pares ou em grupo. A professora/investigadora circulou pela sala no sentido de perceber como se estava a desenrolar o trabalho, nesta fase inicial, não tendo sentido necessidade de os incentivar ou de esclarecer dúvidas. Justifica-se tal envolvimento pela forma como as questões foram apresentadas e sequencializadas.

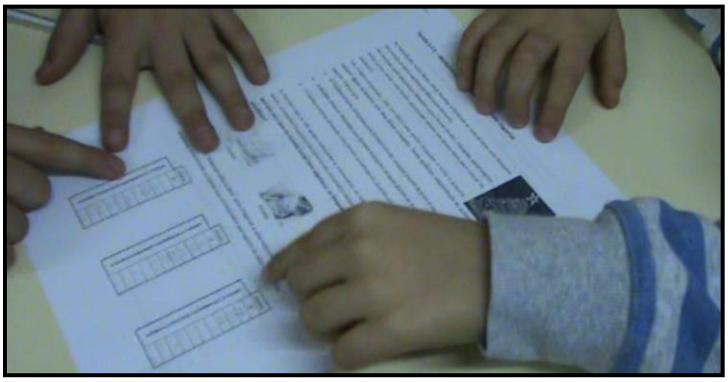


Fig. 9 – Organização de dados - Preenchimento de tabelas

Nesta fase, de interpretação dos dados constantes no problema e de reorganização dessa informação nas tabelas, o processo de abstração surge de forma simples e subdesenvolvida, progredindo para uma linguagem mais formal. Vejamos como estes e outros processos de construção do raciocínio estiveram presentes na realização da tarefa apresentada.

Recognizing

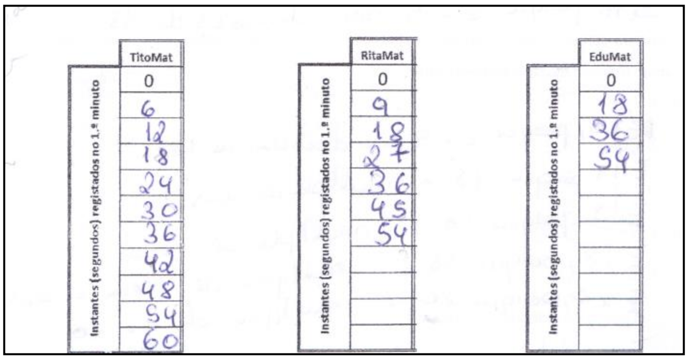
A ação epistémica *Recognizing* parece estar presente no preenchimento das tabelas, bem como na tentativa de resposta às primeiras questões. Vejamos os diálogos mantidos entre alguns alunos.

Grupo A [alunos do 4.º ano]
Marta: As lâmpadas do Tito piscam de seis em seis…
Bárbara: É a *tabuada dos seis*… escreve!
Marta: As lâmpadas da Rita piscam de nove em nove…
Bárbara e Rui: É a tabuada dos nove… [em uníssono]

Podemos observar através das respostas dadas pela Bárbara e pelo Rui, que os alunos reconheceram a mesma regularidade presente nas tabuadas, compreensão que tornou possível o preenchimento imediato das tabelas.

Grupo B [alunos do 5.º ano]
Beatriz: As lâmpadas piscam de seis em seis, de nove em nove e de dezoito…
Nuno [interrompendo]: Já demos isso, são os múltiplos.

Neste caso podemos observar que o reconhecimento de uma estrutura familiar (múltiplos de um número), adaptada pelos alunos à nova situação, permitiram o preenchimento da tabela:



Instantes (segundos) registados no 1.º minuto	TitoMat	RitaMat	EduMat
	0	0	0
	6	9	18
	12	18	36
	18	27	54
	24	36	
	30	45	
	36	54	
	42		
	48		
	54		
	60		

Fig. 10 – Preenchimento de tabelas – Grupo B

A ação *Recognizing* parece também estar presente na resposta às questões:

No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

Todos os alunos reconheceram que a informação constante nas tabelas já preenchidas serviria de base à resposta a estas questões.

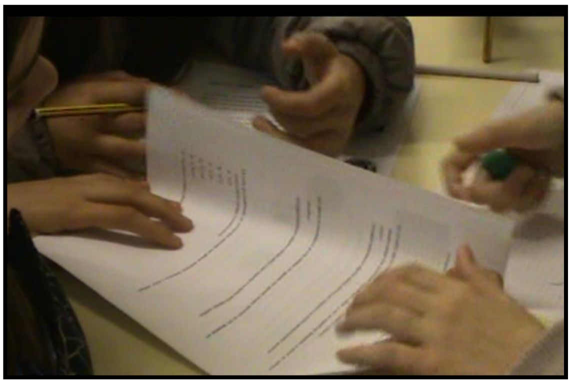


Fig. 12 – Identificação de regularidades - resolução

Grupo B

Paula leu a primeira questão e em poucos segundos:
Beatriz: Vamos ver às tabelas.
Nuno: Pois, vê quando se repetiram… prende assim a folha para ser mais fácil…
Paula: No 18, 36 e 54…
Nuno: Mas diz de quanto em quanto tempo, logo é 18.

Este grupo de alunos reconheceu a importância da informação constante nas tabelas, útil para darem resposta às questões colocadas. Foi assim possível a sua progressão para outro nível/questão. Entende-se não ter havido da parte dos alunos uma construção, mas sim a reorganização dos dados preenchidos, através de estruturas que lhes são familiares.

Em traços gerais podemos concluir que o processo *Recognizing* surge e está associado à perceção dos alunos para selecionarem dados pertinentes que lhes permitam dar resposta às questões colocadas.

Building-with

A ação *Building-with* parece também estar presente no preenchimento das tabelas. A necessidade de atingir determinado objetivo conduz os alunos à seleção de estratégias – destacar, rodeando ou sublinhando, semelhanças. A aplicação de diferentes estratégias parece ter facilitado o processo de raciocínio dos alunos.

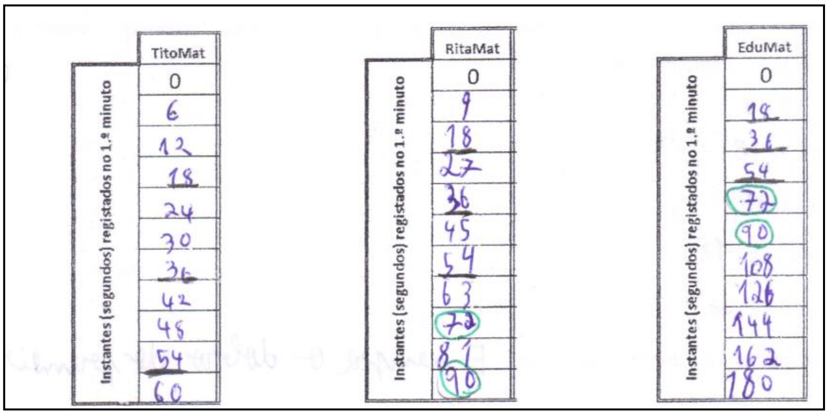


Fig. 13 – Preenchimento de tabelas – Grupo C

Depois de confrontados quanto ao raciocínio desenvolvido, os alunos referiram:

Grupo C

João: Nós pensámos assim: sublinhámos todas as repetições comuns, ocorridas no primeiro minuto. Depois rodeámos as restantes repetições…
Pedro: Mas isso foi porque nos enganámos e continuámos as tabelas da RitaMat e do EduMat depois do primeiro minuto. Aí só se repetiam dois números.
João: Mas nós percebemos que as três se repetiam de dezoito em dezoito segundos.

A ação *Building-with* parece também evidenciar-se aquando da resposta dada pelo grupo D. Neste caso os alunos construíram uma nova tabela, onde dispuseram a informação que consideraram ser necessária para justificar o seu raciocínio e dar resposta à questão colocada.

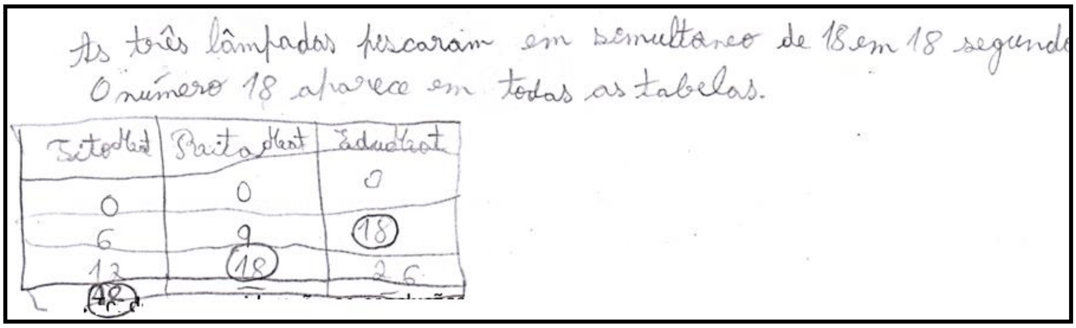


Fig. 14 – Identificação de regularidades - Grupo D (4.º ano)

Para além destas estratégias, os alunos evidenciaram outras formas de expor o seu raciocínio perante o grupo, fazendo uso de linguagem corporal, neste caso gesticulando durante a exposição do seu raciocínio. Parecem estar presente as ideias de Dooley (2007), constatando-se que este tipo de comunicação pode facilitar e promover a colaboração coletiva durante a exposição de raciocínios e construção de novos conhecimentos. Destaca-se o facto de os alunos, apesar de terem identificado relações numéricas com alguma facilidade, terem evidenciado dificuldades em estabelecer uma correspondência entre a sua resposta e os dados do enunciado, premeditando a existência de alguma propriedade generalizável. Tiveram, sobretudo, dificuldade em evidenciar, por escrito, que o *mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor dos múltiplos comuns* e que *se esses forem, eles próprios múltiplos entre si, o respetivo mínimo múltiplo comum será o maior deles*. O processo *Building-with* encontra-se, nesta situação, associado ao reconhecimento da construção da tabela como meio eficaz para apresentar uma solução e justificar o problema colocado.

Constructing

Através do exemplo que se segue podemos observar de que forma poderá estar presente o processo de construção.

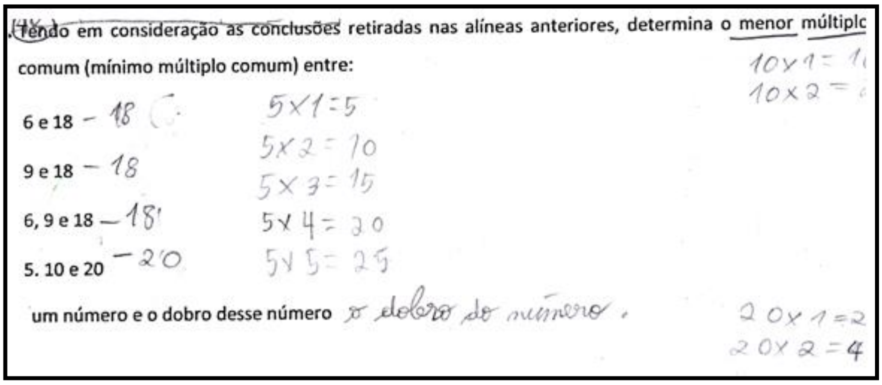
Fig. 15 – Mínimo Múltiplo Comum (generalização)

Grupo D

Rui [a respeito do cálculo mínimo múltiplo comum entre 6 e 18]: é 18… vê na tabela, é o primeiro a repetir-se.
Ana: e os outros também são fáceis… também são 18. E aqui (apontado para o cálculo do mínimo múltiplo comum entre 5, 10 e 20)?
Rui: faz as tabuadas…
[Ana vai construindo a tabuada sob olhar e participação dos colegas até que todos concluem, ainda durante a construção dessas tabuadas, que o respetivo mínimo múltiplo comum será 20].

Entretanto chamam a professora para esclarecerem as suas dúvidas face à questão: *qual é o mínimo múltiplo comum entre um número e o seu dobro?*
Rui: …mas um número qualquer?
João [interrompendo]: pode ser o 4 e o 8, por exemplo?
Professora: … mas esses não representam um número qualquer, são o 4 e o 8!
João: podemos arranjar mais…
Professora: A situação será a mesma. Experimentem e vejam se chegam a alguma conclusão.

Analisemos a resposta dada pelos alunos:


Tendo em consideração as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, determina o menor múltiplo comum (mínimo múltiplo comum) entre:

6 e 18 - 18

9 e 18 - 18

6, 9 e 18 - 18

5. 10 e 20 - 20

um número e o dobro desse número o dobro do número.

5×1=5
5×2=10
5×3=15
5×4=20
5×5=25

10×1=1
10×2=

20×1=2
20×2=4

Fig. 16 – Mínimo Múltiplo Comum (concretização)

Podemos constatar que os alunos utilizaram construções prévias, nomeadamente a informação adquirida durante a investigação da regularidade do número de piscas de cada uma das lâmpadas, para adquirirem novo conhecimento. Como tal, nesta questão, associaram de imediato o mínimo múltiplo comum a essa regularidade observada, o que os levou a concluir e generalizar que o mínimo múltiplo comum entre os dois ou três números (incluindo os desconhecidos) seria o menor dos múltiplos comuns. Considera-se que as construções já adquiridas pelos alunos e o contexto foram essenciais para que esses adquirissem novas construções, mesmo que estas ainda não apresentem um caracter definitivo. O processo de matematização vertical é evidenciado na aquisição do novo constructo.

Matematização vertical

Percebemos que os alunos, não tendo presente o conceito de mínimo múltiplo comum, construíram novos conhecimentos por reorganização de outros já adquiridos. Observamos essa situação na transição do conhecimento prévio existente em relação à construção de tabuadas e à identificação dos múltiplos de um número, para o preenchimento das tabelas, para dar resposta à questão *No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?*, bem como para generalização da propriedade a qualquer número. Em traços gerais, este processo foi observado através da reorganização de construções prévias, através da qual os alunos construíram um novo conceito abstrato, dando maior profundidade aos conhecimentos já adquiridos.

Consolidation

Considere-se o desempenho dos alunos na construção da tabela referente à questão número dois.

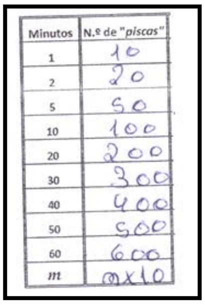

Minutos	N.º de "*piscas*"
1	10
2	20
5	50
10	100
20	200
30	300
40	400
50	500
60	600
m	m×10

Fig. 17 – Regularidade numérica – generalização (Grupo C)

Relativamente à generalização numérica, os alunos não revelaram dificuldades, contudo observou-se um breve impasse ao procurarem generalizar a regularidade observada a *m* minutos. Através do diálogo mantido com os alunos deste grupo, os quais interrogaram a professora quanto ao significado da letra *m*, percebeu-se que a generalização conseguida na questão 1.4 e) permitiu que esses se tornassem mais perspicazes e alcançassem a resposta desejada. Contudo, observámos dificuldades relacionadas com o significado dado às letras, tendo havido a necessidade de os alunos substituírem a letra *m* por *n*, para que esta adquirisse, para eles, o significado de número qualquer. Em traços gerais considera-se que os alunos tornam-se mais perspicazes, flexíveis e confiantes e, como tal, mais conscientes das suas novas construções. Considera-se que a consolidação das novas construções teve forte influência nos processos descritos anteriormente, estando muito dependente da sequencialização das questões colocadas e do contexto apresentado.

Conclusão

Foi possível descrever como se organizou o raciocínio dos alunos durante o processo de abstração e de generalização, bem como identificar algumas dificuldades evidenciadas no reconhecimento de regularidades, na generalização de relações funcionais - pensamento funcional - e de relações numéricas. Foi também possível constatar que, dependendo das tarefas aplicadas e do contexto de aprendizagem, os alunos mais jovens compreendem e utilizam notação algébrica, revelando capacidade para generalizar propriedades e relações numéricas. Como tal, entende-se ser vantajoso incluir, no currículo do ensino básico (1.º e 2.º ciclos), o desenvolvimento do pensamento algébrico, por estímulo das ideias naturais algébricas dos alunos e consequente reorganização dos seus conhecimentos. É nesse sentido que se valoriza a proposta curricular *Early Álgebra* e a dinamização de tarefas exploratórias em contexto sala de aula, onde os alunos possam expor o seu raciocínio, prevendo, discutindo, argumentando e comprovando as suas ideias. Consideramos, como tal, que o papel do professor, na planificação e dinamização destas tarefas, é preponderante, não só por poder minimizar futuras dificuldades durante a aprendizagem da Álgebra, como também por este adquirir informação que lhe possa ser útil para corrigir outro tipo de erros e, eventualmente, selecionar outras formas de atuação em contexto sala de aula.

A aplicação do modelo teórico AiC revelou a influência do contexto no processo de abstração e construção do conhecimento, permitindo observar as ações dos alunos durante esse processo. Uma vez que este processo é observável, poderá ser um bom modelo teórico para aferir em que fases ocorrem dúvidas e, em tempo oportuno, identificar e corrigir eventuais dúvidas.

REFERÊNCIAS

Bastable, V., & Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 165–184). Mahwah: Erlbaum

Bogdan, R. C., Biklen, S. K., Alvarez, M. J., Vasco, A. B., dos Santos, S. B., & Baptista, T. V. M. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Dooley, T. (2007). Construction of knowledge by primary pupils: The role of whole-class interaction. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1658 - 1667). Larnaca, Cyprus: CERME.

Dreyfus, T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. Regular Lecture, *12th International Congress on Mathematical Education* (*ICME 12*), Seul.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel.

Harel, G. (2006). Mathematics Education Research, Its Natures, and Its Purpose: A Discussion of Lester's Paper. *ZDM*, 38 (1), 58-62.

Hershkowitz, R., Schwartz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195 - 222.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In S. Fennell (Ed.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25–26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: ME/ DGIDC.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), International conference for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 127–134). Honolulu: University of Hawaii.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.