CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR: A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA COM FRAÇÕES

Ricardo Filipe Marques Portugal

Bolseiro [1]
portugal.pt@sapo.pt

Dra. María Teresa González Astudillo
Universidade de Salamanca
maite@usal.es

Resumo

A presente comunicação tem por base uma investigação em curso centrada nos conhecimentos matemáticos mobilizados por dois professores no ensino do tópico dos números racionais no 5º ano de escolaridade. Esta comunicação centra-se na descrição e análise de uma aula em que o professor propõe um problema que envolve adição de frações com denominadores diferentes. A análise desta aula será um ponto de partida para a identificação dos conhecimentos matemáticos para ensinar mobilizados pelos professores no ensino dos números racionais, que podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e consequentemente do raciocínio matemático dos alunos. A investigação segue uma metodologia de carácter qualitativo e interpretativo. Foi possível identificar componentes distintas do conhecimento matemático para ensinar manifestados pelo professor na sua prática letiva. De entre estes, o conhecimento de conteúdo especializado (SCK) e conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) foram domínios que se destacaram dos restantes.

Palavras chave: Conhecimento matemático para ensinar, números racionais, raciocínio matemático.

Introdução

O programa de matemática (ME, 2007) segue as recomendações das atuais tendências da *Early Algebra,* que defende o desenvolvimento do *pensamento algébrico* desde os primeiros anos de escolaridade. A introdução de um tópico sobre números racionais ainda no 1º ciclo parece ser disso uma evidência.

Diferentes estudos descrevem as dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem dos números racionais. Segundo Pinto e Monteiro (2006), um dos obstáculos à compreensão deste conceito prende-se, no contexto da realidade portuguesa, com a forte tendência para os professores enfatizarem o cálculo algorítmico, as regras e os procedimentos, relegando para segundo plano a resolução de problemas. Destacam ainda a pouca conexão que é feita entre representações. Estes são precisamente alguns dos traços mais frequentes no ensino da matemática que o movimento da *Early Algebra* pretende contrariar. De facto, o pensamento algébrico está relacionado com a generalização, a aprendizagem com compreensão e o uso de diferentes formas de representação (Blanton & Kaput, 2005).

A tarefa de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos exige conhecimentos matemáticos e didáticos inovadores, bem como uma mudança nas concepções dos professores sobre o que é ensinar e aprender matemática, motivando

[1] Bolseiro de doutoramento da Universidade da Beira Interior financiado pelo ICI e Banco Santander Totta.

mudanças nas suas práticas. Segundo Ponte (1995), o professor tem de ter um papel essencial nos processos de mudança curricular, não só para os interpretar corretamente, mas também para informar e validar o respectivo conteúdo. Assim, e porque reconhecemos que o professor é uma figura fundamental no processo ensino aprendizagem, parece-nos fundamental compreender em que se baseia o seu conhecimento, e quais os mecanismos que usa e que o ajudam na sua vida profissional.

A presente comunicação tem como pano de fundo um estudo mais amplo que pretende identificar e classificar, no contexto do modelo teórico sugerido por Hill, Ball & Schilling (2008), os conhecimentos matemáticos mobilizados por dois professores no ensino do tópico dos números racionais no 5º ano de escolaridade, com particular foco naqueles conhecimentos que se revelem promotores do desenvolvimento do pensamento algébrico. Aqui, centramo-nos na descrição e análise de apenas uma aula.

Pensamento algébrico e raciocínio matemático

Nos últimos anos, tem-se assistido a um movimento que defende a integração do pensamento algébrico na matemática escolar desde os primeiros anos. Blanton e Kaput (2005) designaram esse movimento por *Early Algebra* e caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Assim o pensamento algébrico está relacionado com a generalização, que no entender de Kaput (1999) envolve a extensão do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, e a identificação de aspectos comuns, padrões, procedimentos, estruturas ou relações. No entanto, no cerne do pensamento algébrico estão os significados e o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008).

A investigação sobre pensamento algébrico valoriza o uso de diferentes formas de representação. Para além da notação aritmética e algébrica, existem outros sistemas simbólicos que são reconhecidos como fundamentais: as tabelas, os gráficos e a linguagem natural (Carraher & Schliemann, 2007). São também aceites formas de representação menos convencionais, entre elas artefactos visuais ou concretos tais como retas numéricas, diagramas e objetos que se tornam referências e em torno dos quais os alunos podem pensar algebricamente.

Para comunicar raciocínios são necessárias representações, e para McIntosh, Reys e Reys (1992), o reconhecimento de que os números racionais podem ser representados de várias formas faz parte do sentido de número racional. Por outro lado, Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993), sugerem que a aquisição do conceito de número racional depende da facilidade de transformar uma representação noutra. E para Arcavi (1994) é fundamental que os alunos tenham a capacidade de escolher uma representação para a resolução de um problema e, se necessário, reconhecer a ineficácia dessa representação e procurar uma outra que a substitua.

Sendo o raciocínio reconhecido como inseparável das representações e da linguagem através da qual se expressa (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 2001), o programa de matemática (ME, 2007) assume que deverá ser dada uma atenção permanente ao desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo considerado uma capacidade transversal. O desenvolvimento do raciocínio matemático, e em particular do pensamento algébrico, depende, não só de processos centrais como a generalização e a justificação, mas também do estabelecimento de conexões. As conexões matemáticas devem ser destacadas e valorizados para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocinar matematicamente.

Este trabalho exige uma atenção continuada por parte do professor. Por um lado na escolha das tarefas, mas também na exploração matemática das mesmas. É importante que o professor forneça aos alunos diferentes formas de representação que se tornem referências, e que lhes permitam pensar algebricamente. Um outro papel fundamental do professor é a criação de um ambiente de trabalho, onde os alunos se identifiquem como uma comunidade de construção de conhecimento matemático, onde impere a comunicação suportada pelo discurso argumentativo (Blanton & Kaput, 2008; Kieran, 2007; Cusi e Malara, 2007).

Enquadramento teórico

Nas últimas décadas o interesse por questões relacionadas com o conhecimento e práticas profissionais de professores de matemática tem aumentado tanto a nível nacional como internacional. Nesta perspetiva, reconhecemos o professor como uma figura fundamental no processo ensino aprendizagem, daí que seja urgente compreender em que se baseia o seu conhecimento, e quais os mecanismos que usa e que o ajudam no seu desenvolvimento profissional (Ponte, 1998).
Assim, e com vista a compreender o que os professores precisam conhecer e ser capazes de fazer para ensinar matemática, Hill, Ball & Schilling (2008) propõem um modelo baseado em recolhas empíricas. O modelo emergiu da análise conceptual de ensino em sala de aula, e foram posteriormente refinados ao mesmo tempo que eram desenvolvidas e implementadas medidas de conhecimento matemático para ensinar. Depois dessa análise estabeleceram a base para uma teoria baseada no conhecimento para o ensino de matemática na prática.

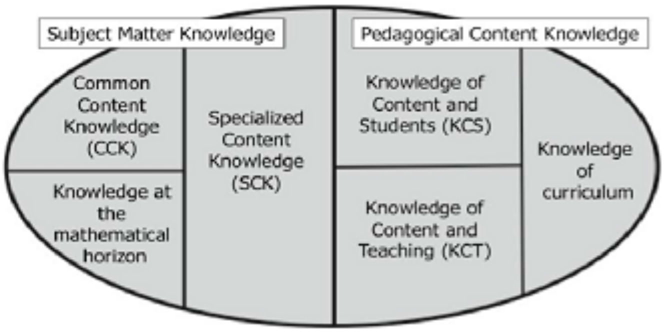

Figura 1: Subdomínios do conhecimento matemático para o ensino (MKT) (Ball et al., 2008, p. 403)

Em linhas gerais o *Conhecimento do Conteúdo* em *Conhecimento de Conteúdo Comum* (CCK), refere-se ao conhecimento usado para resolver problemas matemáticos, que tanto podem ser os de um matemático, como os de um adulto com conhecimentos matemáticos.

Conhecimento *de Conteúdo Especializado* (SCK), é entendido como o conhecimento que o professor deverá deter para levar os alunos a entender/compreender verdadeiramente o que fazem, e porque o fazem. Não se esgota, portanto, no conhecimento de procedimentos, pois envolve também os necessários conceitos.

Conhecimento no Horizonte Matemático (HCK), refere-se à consciência que o professor deve ter sobre os conhecimentos matemáticos prévios e futuros no currículo de matemática. Refere-se também às relações entre distintos tópicos matemáticos, bem como à evolução das aprendizagens de um mesmo tópico ao longo da escolaridade.

Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS), relaciona-se com o conhecimento do modo de pensar dos alunos, do que sabem, ou de como aprendem esse conteúdo particular. Inclui o conhecimento dos erros e dificuldades habituais, as concepções erradas, as estratégias usadas, inclui a capacidade de valorizar e compreender o aluno e de saber como evolui o seu raciocínio, ou seja, situações que exigem interações entre a compreensão matemática e o conhecimento do pensamento matemático dos seus alunos.

Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), é o conhecimento que combina saber sobre o ensino e sobre a matemática. Relaciona-se com a escolha da sequência de tarefas na aula, a escolha das representações adequadas, e também a capacidade de compreender o raciocínio dos alunos e das suas estratégias, corrigindo e alterando as suas concepções erradas ao longo do processo ensino.

Conhecimento do Currículo (KCC), passa pelo conhecimento dos programas e sua articulação horizontal e vertical, bem como dos materiais adequados a determinado tópico, sejam eles textos, programas, software, materiais manipuláveis, filmes, apresentações laboratoriais ou convites à pesquisa.

Metodologia

Neste estudo seguiu-se um paradigma qualitativo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) com um estudo de caso. A aula analisada faz parte de um conjunto de 34 aulas observadas presencialmente entre abril e junho de 2012. Todas as aulas foram gravadas em áudio e vídeo, e totalmente transcritas. Durante a observação o investigador utilizou também um diário de bordo que lhe permitia registar informações imperceptíveis quer pela gravação áudio quer vídeo. Antes de cada aula o investigador teve uma conversa com os docentes para compreender quais os seus objetivos, intenções e metodologias que estes pensam implementar, bem como a sua percepção sobre as possíveis dificuldades que esperam que os alunos possam vir a ter. No final da aula foi feita uma análise reflexiva e retrospetiva onde se esclareceram pontos críticos da sua atuação.

Foi realizada no início do estudo, uma entrevista semiestruturada, e irá ser realizada uma outra assim que seja feita uma análise mais detalhada dos dados. As entrevistas já realizadas foram também gravadas em áudio e integralmente transcritas.

Por se tratar de uma análise preliminar dos dados, a aula descrita nesta comunicação foi analisada com base na 1ª entrevista do professor, no diário de bordo do investigador e na gravação áudio e vídeo da aula. A 2ª entrevista e as conversas informais não foram ainda tidas em conta até ao momento. Esta aula será analisada mais detalhadamente futuramente e em conjunto com as restantes aulas.

A seleção do professor foi feita através de um pedido de autorização ao Diretor da escola, que contactou todos os docentes de 2º ciclo, apresentando sumariamente o objectivo do trabalho. Foi o próprio Diretor que deu indicação do interesse e disponibilidade do professor José (nome fictício) em colaborar no estudo. Apresentei os objetivos do estudo e formalizei o pedido de autorização. Os objetivos do estudo, foram apresentados aos alunos com a respectiva solicitação de autorização antes de se iniciar a recolha de dados. Portanto, não existiam critérios específicos para a seleção do professor a não ser a sua disponibilidade em participar.

O professor José é licenciado em matemática e ciências num instituto politécnico público. Leciona as disciplinas de matemática e ciências naturais há 22 anos. Considera-se um professor interessado e empenhado, contudo nos últimos 3 anos não frequentou nenhuma ação de formação.

Análise preliminar dos dados

Nesta comunicação é analisada a aula do dia 11 de maio de 2012, onde o professor apresenta aos alunos um problema relacionado com a adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Na aula anterior já tinha sido abordada a adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

O professor iniciou a aula apresentando oralmente o seguinte problema. Uma pessoa tem 45€ para dar aos filhos. Vai dar 1/2 desse dinheiro ao filho que se portou melhor, que foi o Rui. A Joana, que tirou más notas, recebe 1/3 do dinheiro.

a) Quanto dinheiro é que recebe cada um?
b) Qual a fração do dinheiro é que sobrou?

O professor fez um esquema no quadro, que organizava os dados. Pediu aos alunos que começassem a resolver apenas a primeira alínea. Mais tarde quando alguns alunos começaram a dar respostas, o professor apresentou a segunda pergunta. O trabalho era individual, sendo no entanto, permitido que os alunos conversassem com os seus colegas de carteira.

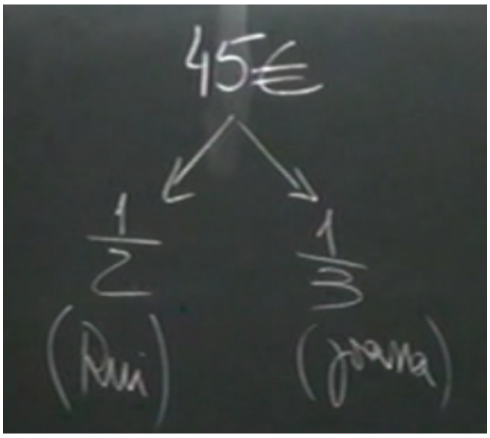

Figura 2: Esquema apresentado pelo professor

Os alunos conforme terminavam o exercício iam mostrando ao professor a sua resolução. Ao começar a ver as resoluções apercebe-se que alguns alunos estão a interpretar mal o problema e interrompe a aula para fazer um esclarecimento.

> *P: Este problema que resumi no quadro é assim: um senhor tem 2 filhos, tem 45 euros e quer dar algum dinheiro aos filhos. Dá 1/2 deste dinheiro ao Rui, 1/3 deste dinheiro à Joana e ainda lhe sobrou algum pelo menos para um cafezinho.*

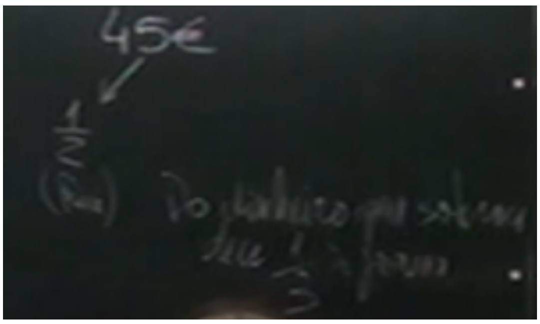

Figura 3: Esquema alternativo apresentado pelo professor

Outro problema era se fosse assim: Um senhor tem 45 euros vai dar ao Rui 1/2 desse dinheiro. Até agora não há diferença nenhuma no problema, mas para eu dizer do dinheiro que sobrou, deu à Joana 1/3, então já não podia a seta sair aqui dos 45. Então era do bolo que sobrou, deu 1/3 à Joana. Estes dois problemas são completamente diferentes. Aqui este um terço e este um meio[aponta para o esquema que desenhou no quadro]estão sempre relacionados com o dinheiro todo que o pai tinha. E aqui não! Aqui o pai deu metade do dinheiro ao Rui e do dinheiro que sobrou deu um terço. É diferente são duas quantidades diferentes. Perceberam a diferença? Isabel percebeste?
A: Não.

O conhecimento mobilizado pelo professor ao modificar parcialmente o enunciado do problema (SCK) ajudou os alunos a interpretar corretamente o enunciado e a compreender o erro que estavam a cometer. O uso de um esquema no quadro para explicar a interpretação errada do enunciado (KCT) fez com que os alunos conseguissem corrigir uma concepção errada.

Em resposta, o professor dá em exemplo à Isabel usando umas notas que tinha levado.

P: 40 euros! Se eu disser assim: vou-te dar metade a ti e metade à Teresa quanto dinheiro é que eu te dou?

A: A mim? Dá-me 20€.

P: A ti dou-te 20€. Toma lá! E a ela?

A: 20

P: 20 toma lá! Outra coisa era eu dizer assim: dou-te 20€ a ti e do que sobrar dou metade à Teresa. Eu ia-lhe dar agora 20 euros a ela?

A: Não.

P: Quanto é que lhe ia dar?

A: 10 euros

P: 10. Percebeste a diferença?

A: Sim!

Quando a aluna responde que não compreendeu a explicação do professor, este é obrigado a encontrar uma nova estratégia que a convença (KCT). Note-se que o questionamento aqui é usado para se certificar que a aluna entende a diferença entre os raciocínios. Ao recorrer a material manipulável [notas de um jogo] é notório que o professor já tinha previsto que poderiam existir dificuldades (KCS) e começa a explicação por atribuir significado matemático à interpretação dos alunos (SCK). Note-se que depois da concretização da situação os alunos compreenderam de imediato o contexto que estava a ser estudado o que enfatiza a importância da ação do professor.

Depois de esclarecida esta situação os alunos continuam a resolver o problema. Quando alguns começam a terminar a alínea a), o professor sugere que tentem saber que fração representa o dinheiro que sobrou. Entretanto, circula pela sala, observando as resoluções e dando pistas a alguns alunos. Passado algum tempo, dirige-se à turma, dizendo que encontrou duas resoluções interessantes, porém ele irá propor uma terceira resolução e pede a um dos alunos que vá ao quadro explicar o seu raciocínio.

Por diversas vezes o professor sugere a utilização de um esquema para ajudar na compreensão e na resolução do problema. Esta atitude para além de ser outra forma de abordar o problema, apela à utilização de múltiplas representações. Esta sugestão do professor veio revelar-se bastante útil. Ao afirmar que para além das duas resoluções dos alunos vai apresentar uma resolução diferente, consideramos que esta sugestão revela (HCK), pois percebe as relações que existem entre as várias resoluções e pretende articulá-las e sintetizá-las recorrendo ao esquema.

O professor ao circular pela sala, necessita em primeiro lugar de diagnosticar, ou seja, analisar as resoluções, verificar se contêm ou não erros (CCK). De seguida, tem que perceber as potencialidades e oportunidades matemáticas que as resoluções dos alunos podem trazer para a sua aula (KCT). A escolha de um dos alunos para ir apresentar a sua resolução aos colegas, evidencia que aquela resolução é a mais adequada ao modo como pretende sequenciar a aula, o que manifesta (KCT). Os conhecimentos mobilizados pelo professor nesta fase são muito importantes para o desenvolvimento da discussão em grande grupo, momento em que os alunos podem descrever oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam, justificando os seus raciocínios. Ora esta oportunidade que é dada aos alunos é uma clara promoção do raciocínio matemático dos alunos.

A: Eu pensei assim: fiz 45 euros a dividir por 2.

P: Então faz!

[aluno escreve no quadro]

P: Oh Rodrigo achas que fez bem ou fez mal?

A1: Acho que fez bem!

P: Pois1/2 é o mesmo que?

A1: Metade.

P: Olha o Rui já lá tem dinheiro dele. Não está nada mal!Olha, porque é que estás agora a dividir por 3? [Dirige-se para o aluno que está no quadro]

A: Porque já é 1/3 que é para a Joana. [Continua a escrever no quadro]

P: Ahh está bem, está bem! É um terço para a Joana pois é.

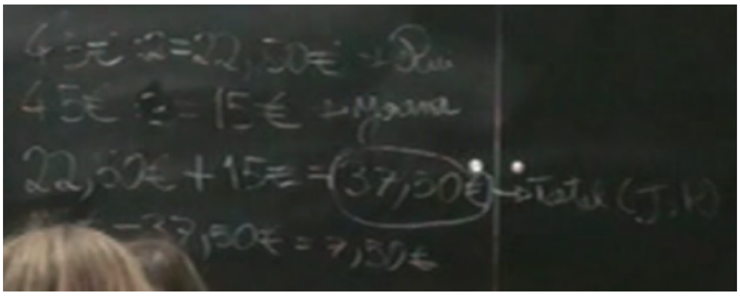

Figura 4: Resolução apresentada pelo aluno no quadro

P: Ora calma! O jovem primeiro calculou o dinheiro que vai receber o Rui, já está! Dividiu por 2, 1/2 é metade. Correto! A seguir foi calcular o dinheiro que recebe a Joana,1/3 é sinónimo de dividir por 3. Muito bem 15 euros. Para que é esta conta de mais?

A: É para saber qual é o total deles os dois que é para depois retirarmos ao dinheiro total que é para saber com quanto é que ficou o pai.

P: Precisamente. Calcula o dinheiro todo que deu, está aqui. [Aponta para a resolução] Se deu este dinheiro ficou sem ele, e ficar sem ele que conta é?

A: Menos. [em coro]

P: Menos! Então é o que ele está a fazer 45 menos 37,5 muito bem!

Note-se que o professor vai alternando as expressões que usa para denotar as frações, por exemplo vai dizendo que um terço é sinónimo de dividir por 3 (SCK).

O professor percebe que o aluno está a usar o conceito de fração como operador ao calcular 1/2 de 45. Note-se que é através de um questionamento hábil que o professor consegue que os alunos atribuam significado às operações. Repare-se que o professor tenta que as exposições dos alunos sejam o mais claras possível (KCT). Esta preocupação com a linguagem usada e com os significados que os alunos atribuem aos objetos matemáticos é bastante importante na promoção de uma aprendizagem com compreensão.

A fase seguinte consistiu na explicação, por parte do aluno, da fração que corresponde à parte do dinheiro que sobrou.

A: Então nós tínhamos as duas frações e nós queremos saber qual é a fração que ele gastou, mas como as duas não têm denominadores iguais temos que fazer com que as duas fiquem equivalentes, que tenham denominador igual.

P: Quem percebeu o que ele disse levante o braço. [Alguns alunos levantam o braço] Acho que tens que explicar outra vez.

P: 1/2 sabemos que já deu, 1/3 sabemos que já deu. Sobrou de certeza uma fração nem que seja zero. Para saber o que sobrou vamos fazer as contas precisamente da mesma maneira que se fez com o dinheiro. O raciocínio dele é simples. Vai juntar as frações como se fez com o dinheiro vai juntar as frações e o resultado vai tirá-lo à…?

A: 45 euros.

P: Errado!

P: Quando falamos que deu um meio este um meio está-se a referir ao dinheiro total e neste momento os 45€ representam o quê?

A: O dinheiro total.

P: E quando nós dizemos 1/2,1/3, 2/7 daquele dinheiro é porque o dinheiro total representa o quê?

A: A unidade.

P: A unidade! Por isso é que eu falei mais do que uma vez: façam esquemas!

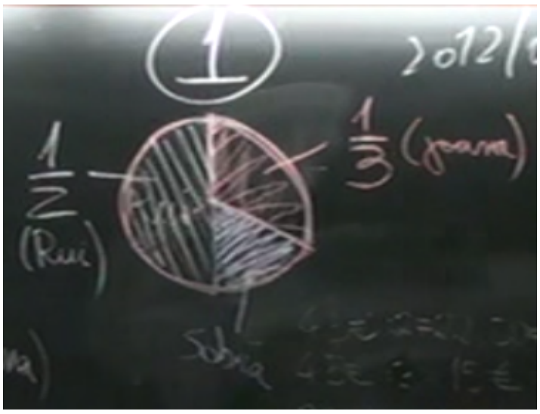

Figura 5: Esquema desenhado pelo aluno no quadro

P: Para sabermos aquela parte roxa [parte que sobra], o raciocínio do Pedro aplica-se impecável. Explica lá outra vez a apontar para o esquema. Socorre-te do esquema.

A: Isto é o dinheiro que o Rui recebeu. [aponta para o esquema] E este é o dinheiro que a Joana recebe [aponta para o esquema]. E nós queremos saber a fração do dinheiro que foi para o pai.

A: Então temos que somar este com este [aponta para o 1/2 e 1/3] para depois subtrairmos com o total.

P: A unidade! Então isto foi o raciocínio dele. Isto tudo vale uma unidade. Então, junta o que deu ao Rui e o que deu à Joana, e para saber esta parte aqui [aponta para o que sobra] vai tirar à unidade. pronto então agora já podes fazer as contas.

O professor ao perceber que a explicação do aluno não foi suficientemente clara, tenta clarificá-la, criando uma analogia entre as operações que foram feitas com o dinheiro, e as operações que se devem fazer com as frações (SCK). Porém, os alunos têm dificuldade em compreender que a totalidade do dinheiro é representada pela unidade, o que obriga o professor a recorrer a exemplos dados anteriormente que permitam aos alunos estabelecer essa conexão (KCT). Pedir aos alunos que usem um esquema para explicar o seu raciocínio, tem como objetivo que eles estabeleçam conexões entre várias representações (KCT), assim está a ampliar as hipóteses dos alunos organizarem o seu pensamento, para além de facilitar a comunicação. Enquanto um dos alunos vai expondo o seu raciocínio aos colegas, o professor vai questionando os alunos para se certificar de que eles estão a compreender o raciocínio que está a ser apresentado (KCT). Esta é outra atitude importante, pois os alunos também devem ser capazes de acompanhar os raciocínios que os colegas ou o professor estão a apresentar. Por vezes existem, por parte do professor, algumas imprecisões no uso da linguagem, especialmente quando se refere a uma fração sem que se tenha presente a unidade de referência.

Depois de ter ficado claro que é necessário somar duas frações com denominadores diferentes para se obter a fração do dinheiro que o pai deu aos filhos, segue-se o modo como essa operação foi efetuada.

A: Mas como não podemos fazer este mais este! [aponta para o 1/2 e 1/3] Precisamos de pôr ao mesmo denominador.

P: Eish pois é! Mas como é que tu vais fazer um mais ou o outro?

A: Vou usar frações equivalentes.

P: O problema é que o 2 não o conseguimos passar para 3.

A: Nem o 3 para 2.

P: Vamos à tabuada…?

A: Do 2 e descobrimos.

P: Só do 2?

A: E do 3.

P: Mas o 3 não está na tabuada do 2 Luís!

A: Mínimo múltiplo comum.

P: Outra maneira de dizer isso!

A: Um múltiplo de 3.

P: Ou seja, por palavras mais simples vamos à tabuada do 2 e à tabuada do 3, e paramos quando encontrarmos um resultado que seja igual. Então qual é que aparece na tabuada do 2 e do 3?

A: É o 6.

P: Ele agora vai arranjar frações equivalentes para substituir as que ali estão.

Note-se que o questionamento do professor visa refinar a linguagem utilizada pelo aluno, revelando-se fundamental construção do conhecimento e na clarificação do raciocínio do aluno. Também vai dando algumas dicas, (KCT) importantes para encorajar os alunos . Todavia ao tentar que o aluno explique por outras palavras o que está a pensar, por exemplo, em relação ao mínimo múltiplo comum, denota (SCK), uma vez que pretende que o aluno atribua outro significado matemático ao que está a dizer. Esta atitude está de acordo com a perspectiva de desenvolver o pensamento algébrico, e consequentemente o raciocínio matemático defendida por vários autores, uma vez que o professor criou um ambiente onde impera a comunicação suportada pelo discurso argumentativo. O raciocínio dos alunos é tomado como ponto de partida para a construção do conhecimento matemático.

De seguida o aluno escreveu no quadro as frações equivalentes a 1/2 e 1/3, e efetuou a soma. O professor perguntou ainda aos alunos qual o significado de 5/6, e após alguma discussão os alunos concluem que os 5/6 representam a fração que o pai deu aos filhos, e insiste que a pergunta inicial não era qual a fração que o pai deu aos filhos mas sim que fração sobrou.

P: Que fração sobrou?

A: Um sexto

P: E de onde é que veio o um sexto?!

A: É o que falta para uma unidade.

P: Exatamente falta 1/6 para chegarmos à unidade. Mas vocês sabem que os professores são uns chatos, e eu agora queria uma conta que desse 1/6. Como é que é Pedro?

A: Agora tiramos 5/6 ao resultado que é uma unidade.

Ao pedir que apresentem “a conta” está a incentivar o uso de uma linguagem progressivamente mais formal, que enriquece e aprofunda os seus conhecimentos (KCC).

Depois de todos os alunos passarem a resolução do quadro para os seus cadernos, o professor pediu a outro aluno que fosse apresentar a sua estratégia. O seu raciocínio, diferia do raciocínio do Pedro apenas no cálculo da fração que corresponde à parte que sobra.

> *P: Xiu, lembram-se ainda como é que pensou o Pedro? O Pedro pensou assim: então se deu um meio a um, deu um terço a outro vou juntar as duas frações e o resultado vou tirar à unidade. Ele não pensou assim, explica lá como é que tu descobriste 7,5. Que fração é do total? Porque isto são 7,5 isto que aqui está! [Aponta para o esquema] Estou a mentir ou estou a dizer a verdade? A roxo vale 7,5! Verdade ou mentira?*
>
> *A: Verdade [em coro]*
>
> *P: Verdade. Então como é que tu descobriste 7,5€? Que fração é do total?*
>
> *A: Eu fiz de cabeça! Fiz 7,5 mais 7,5 que vai dar 15. Já estava duas vezes, depois mais 15, que é outra vez, mais duas vezes depois é mais duas vezes que já ia dar 45. Portanto 7,5 vezes 6 que dá 45 e depois este 6 queria dizer que era 1/6.*
>
> *P: Está interessante este raciocínio, está ou não está?*
>
> *A: Está!*
>
> *P: Ele foi ver quantas vezes é que o 7,5€ cabe na unidade toda até fazer…?*
>
> *A: 45€.*
>
> *P: Quantas vezes é que ele teve que juntar 7,5; 7,5; 7,5 para ter 45?*
>
> *A: 6.*
>
> *P: Então os 7,5 é uma parte de seis vezes que lá cabem. 7,5 é então 1/6.*
>
> *A: Então 45 a dividir por 6 deve dar 7,5.*

Quando os raciocínios dos dois alunos divergem, o professor recapitula o raciocínio do Pedro. Fazer este ponto da situação (KCT) permite contrastar as diferenças entre os dois raciocínios. Ao fazê-lo o professor apela à justificação, que é um dos objectivos do desenvolvimento do pensamento algébrico. Note-se que o questionamento do professor visa enfatizar a relação parte todo. Enquanto que o aluno destaca a fração como operador. Ao concluir que 7,5 é uma parte de 6 que cabem na unidade, denota que valorizou o raciocínio do aluno percebendo a relação parte todo que estava implícita (SCK).

Para terminar, o professor apresenta a sua resolução.

> *P: Eu não fazia contas, não fazia contas complicadas, fazia mentalmente tudo, com o esquema. Quem é que quer entrar no meu cérebro e dizer o que é que eu vou fazer ali no esquema. Afonso o que*

é que achas que vai na minha cabeça o que é que achas que eu vou tentar fazer ali?

A: Dividir em seis.

P: Eu não sei se é em seis se é em oito. Eu tenho é que dividir aquilo…?

A: Em partes iguais.

P: Em partes iguais! Qual é a mais pequena que lá está? É a roxa [parte que sobra] é ou não é a roxa?

A: É.

P: Então eu vou dividir em partes iguais à roxa. Olha querem ver este é só dividir ao meio, não se esqueçam que esta parte roxa veio de metade de um terço olhem ali. [Enquanto fala vai dividindo a figura em partes iguais]. Em quantas partes está dividido?

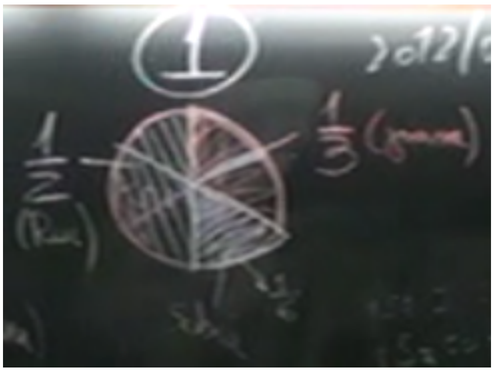

Figura 5: Esquema desenhado pelo professor no quadro

A: Seis.

P: Então quanto é que vale o que sobrou para o pai?

A: 1/6 [em coro].

P: Olhem agora quantos sextos é que deu ao Rui?

A: Três [em coro].

P: Quantos sextos deu à Joana? Foi a fração que o Pedro tinha calculado a fração equivalente há bocado na conta de mais.

A: Dois [em coro].

P: 2/6 foi a fração equivalente que ele tinha calculado há bocadinho em relação a 1/3. Um terço é o mesmo que 2/6, 1/2 é o mesmo que 3/6, sobra 1/6. Eu tinha feito em esquema. Vocês deviam tentar mais vezes fazer esquemas. Como veem é mais simples do que estar a fazer estas contas todas. Joaquim é mais fácil ou não é?

A: Muito mais!

Quando o professor divide o esquema em seis partes iguais e vê quantos sextos pertencem a cada pessoa, recorda os alunos que essas frações dão os mesmos resultados que aquelas frações equivalentes que o Pedro tinha estado a calcular. Está deste modo a conectar as duas formas de representação (KCT). Também às conexões deve ser atribuído um papel central na compreensão da matemática. Através do estabelecimento de conexões, os alunos desenvolvem a sua capacidade de raciocinar matematicamente.

Considerações Finais

A análise preliminar desta aula permitiu identificar componentes distintas do conhecimento matemático para ensinar manifestados pelo professor que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Consideramos que a postura do professor está de acordo com a perspectiva de desenvolver o pensamento algébrico, e consequentemente, o raciocínio matemático defendida por vários autores, uma vez que foi criado um ambiente de trabalho onde o raciocínio dos alunos foi tido como ponto de partida, onde impera a comunicação suportada pelo discurso argumentativo. Destacamos também as conexões que são estabelecidas pelo professor, nomeadamente quando utiliza o esquema como ferramenta intelectual para apoiar os alunos na construção de objetos, em torno dos quais é possível pensar algebricamente, desenvolvendo o raciocínio matemático. Desta forma, o professor demonstra uma visão global do sentido de número racional, fazendo com que os alunos compreendam a forma como as ideias matemáticas se interrelacionam e se constroem umas a partir das outras produzindo um todo coerente. Por isso, consideramos que essa atitude revela (HCK).

Em síntese, alguns conhecimentos mobilizados pelo professor foram claramente potenciadores do raciocínio matemático nos alunos: (i) o uso de material manipulável, ajudou bastante à compreensão do contexto do problema; (ii) o ambiente criado e um questionamento hábil permitiu aos alunos comunicarem de forma clara as suas ideias; (iii) as conexões que foram estabelecidas; (iv) a atribuição de significados às frações obtidas; (v) o incentivo que foi dado aos alunos para usarem uma linguagem cada vez mais formal, por exemplo na tradução de linguagem oral para linguagem matemática, ou na utilização de esquemas para expressarem as suas ideias matemáticas. No futuro, iremos analisar um maior número de sessões, complementando-as com entrevistas aos professores envolvidos, no sentido de compreender com maior profundidade quais os conhecimentos mobilizados na prática docente no ensino dos números racionais.

Bibliografia

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Kieran, C. (1989). The early learning of álgebra: a stuctural perpective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4 (pp. 33-59)*. Reston, VA.: Lawrence Erlboum Associates and NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school álgebra. In *A. Grouws, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the NCTM) (pp. 390-419)*. New York: Macmillan.

Kieran,_C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education (pp.11-49)*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762)*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 & 44.

ME-DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. http://sitio.dgidc.min-du.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In APM (Ed), *Atas do ProfMat 98 (pp. 27-44)*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores – Atas do XIV EIEM* (*pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the Learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts (pp. 327-362)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (*Vol. 1, pp. 143-161)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.