O PAPEL DAS FUNÇÕES DA DEMONSTRAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DOS ESQUEMAS DEMONSTRATIVOS DOS ALUNOS

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

Este artigo foca a problemática da demonstração na matemática escolar. Apresenta parte de um estudo que teve como objetivo identificar as formas como os alunos validam os resultados matemáticos, relacionando-as com a prática social desenvolvida na aula. O estudo situa-se num paradigma interpretativo e, focando-se nos significados dos participantes— uma turma de 9.º ano, de onde foi selecionado um grupo de quatro alunos para alvo de registo vídeo e áudio, e a respetiva professora—, foi orientado pelas seguintes questões: 1) qual a natureza da demonstração no contexto escolar?, 2) qual o papel da demonstração na atividade matemática escolar?, e 3) como se relaciona a concretização da demonstração com a prática social desenvolvida na aula de Matemática? Os resultados discutidos no presente artigo reportam-se ao papel das funções da demonstração na evolução dos alunos para a utilização de esquemas demonstrativos dedutivos, quer nas situações pautadas pela existência de uma fase de conjeturação quer nas situações caracterizadas pela ausência de conjeturação.

Palavras chave: funções da demonstração, esquema demonstrativo, matemática escolar

Introdução

O presente artigo apresenta parte de um estudo que teve como objetivo a identificação do modo como os alunos procedem à validação das suas conjeturas, tendo a mesma sido equacionada no âmbito da prática social desenvolvida na aula. O desenvolvimento da investigação visou dar resposta às seguintes questões: 1) qual a natureza da demonstração no contexto escolar?, 2) qual o papel da demonstração na atividade matemática escolar?, e 3) como se relaciona a concretização da demonstração com a prática social desenvolvida na aula de Matemática? Neste artigo, são apresentados e discutidos resultados relacionados unicamente com a segunda questão.

O artigo começa por focar aspetos teóricos que serão mobilizados na discussão dos resultados empíricos, nomeadamente o conceito de esquema demonstrativo e as perspetivas de educadores matemáticos sobre as funções da demonstração. Seguidamente, é apresentada a metodologia seguida na investigação. Alguns dos resultados são descritos e analisados e finalmente, são explanadas as conclusões relativas aos resultados apresentados no artigo.

Conceito de esquema demonstrativo

O conceito de esquema demonstrativo (*proof scheme* no original) é um conceito-chave da perspetiva compreensiva de demonstração apresentada por Harel e Sowder (2007), sendo a subjetividade a sua principal característica. A ênfase na subjetividade deve-se ao reconhecimento de que é indispensável aos professores identificar o conhecimento atual dos seus alunos. Também Balacheff (1991) considera importante partir da compreensão da forma como os alunos estabelecem a verdade das afirmações matemáticas: "To understand what happens we have to enter the students' world (...). In other words, we must make our own Copernican revolution. (Balacheff, 1991, p. 175)

Harel e Sowder (2007) definem esquema demonstrativo de uma pessoa, ou de uma comunidade, como aquilo que constitui a obtenção de certeza e a persuasão para essa pessoa, ou comunidade, sendo que estes dois processos ocorrem em simultâneo. "Proving emerges as a response to cognitive-social needs, rather than exclusively to cognitive needs or social needs" (Harel & Sowder, 2007, p. 809). Assim, os esquemas demonstrativos podem variar de pessoa para pessoa ou de comunidade para comunidade, assim como a mesma pessoa, ou comunidade, pode usar diferentes esquemas demonstrativos na mesma tarefa, significando que pode passar por diferentes níveis de sofisticação na obtenção da certeza. Passo a apresentar a classificação dos esquemas demonstrativos proposta pelos autores:

1. *Esquemas demonstrativos de convicção externa*
    a. *autoritário* (a autoridade pode ser o professor ou o manual escolar)
    b. *ritual* (baseado na aparência do argumento; por exemplo, a existência de duas colunas para provas em geometria)
    c. *simbólico não-referencial* (depende da manipulação simbólica, com símbolos ou manipulação sem sistema potencial de referentes coerentes, aos olhos dos alunos)
2. *Esquemas demonstrativos empíricos*
    a. *indutivo* (evidência de exemplos, sendo às vezes unicamente um exemplo)
    b. *percetivo*
3. *Esquemas demonstrativos dedutivos*
    a. *transformativo* (possui três características: generalidade, pensamento operacional e inferência lógica; o pensamento operacional é usado quando o indivíduo forma objetivos e sub-objetivos e tenta antecipar os seus resultados durante o processo)
    b. *axiomático* (além de ser transformativo, inclui a compreensão de que o processo inicia-se a partir de axiomas).

Nesta aceção, encontram-se incluídas as várias formas de os alunos validarem as afirmações matemáticas, não se restringindo ao que é considerado demonstrar em matemática, e que os autores designam por esquemas demonstrativos dedutivos axiomáticos. Harel e Sowder (2007), apresentando o estado de arte atual relativamente à demonstração na educação matemática, referem os resultados obtidos por estudos empíricos incidentes (a) nos desempenhos dos alunos, (b) nas práticas profissionais dos professores, e (c) em exemplos de experiências curriculares desenhadas com o objetivo de desenvolver nos alunos competências em demonstrar. Esses resultados são interpretados à luz do conceito de esquema demonstrativo.

Os estudos desenvolvidos ao nível do currículo realizado evidenciam que a grande maioria dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até ao nível superior, usa os esquemas demonstrativos empíricos (Chazan & Lueke, 2009; Healy & Hoyles, 2000; Recio & Godino, 2001; Rodrigues, 2008). A vasta disseminação deste tipo de esquema e a quase ausência de esquemas demonstrativos dedutivos nos alunos de todos os níveis de ensino, à escala internacional, revelam que os vários sistemas educativos têm sido, até à data, incapazes de promover nos seus estudantes o desenvolvimento de argumentos dedutivos, de maior sofisticação, correspondentes ao que será desejável em educação matemática.

Os estudos desenvolvidos no âmbito do nível curricular de ação indicam que a maioria dos professores não atribui grande importância à demonstração, não a abordando nas suas aulas. E para muitos professores, os esquemas demonstrativos empíricos são os mais dominantes para suportar resultados e afirmações matemáticas (Harel & Sowder, 2007).

Por último, os estudos incidentes em experiências curriculares valorativas da demonstração, colocadas em ação por professores com uma intervenção adequada, mostram que esses currículos podem ajudar os alunos, desde muito cedo, a desenvolver o raciocínio dedutivo (Harel & Sowder, 2007). Nesse sentido, é importante que o professor indague sempre sobre o porquê da resposta dada pelo aluno, sem colocar na entoação da voz qualquer juízo validativo da mesma, e que direcione a discussão matemática para o seio da turma, levando os alunos a argumentar uns com os outros (Fonseca, 2004). De acordo com Balacheff (2010), o professor tem um papel fundamental no desenho de situações didáticas conducentes à validação das afirmações matemáticas por meio da demonstração. Nesse sentido, a devolução aos alunos da responsabilidade pela validação das afirmações matemáticas deverá ser uma preocupação do professor (Balacheff, 1991).

As funções da demonstração

De acordo com de Villiers (2001), a demonstração tem múltiplas funções, que não são mutuamente exclusivas, contestando a ideia generalizada de associar a demonstração primordialmente à sua função de verificação/convencimento. Apesar de não ignorar a importância desta função, de Villiers (2001; 2004) não a considera como função predominante no seio dos próprios matemáticos, já que entende que a demonstração não é um pré-requisito para a convicção: a convicção pessoal é obtida pela verificação em muitos casos particulares e, portanto, pela evidência indutiva. Na sua perspetiva, é a convicção que constitui um pré-requisito para a demonstração já que se não estivessem previamente convencidos das suas conjeturas, os matemáticos procurariam um contra-exemplo e não se sentiriam motivados a levar tanto tempo a demonstrá-las. O autor defende a importância da função verificativa principalmente no caso de resultados não intuitivos duvidosos ou surpreendentes.

Hersh (1997), embora atribuindo à demonstração em matemática um papel primordial de convencimento da comunidade matemática, não a associa à auto-convicção, admitindo, porém, que interessa mais aos matemáticos compreender a demonstração do que simplesmente verificar se uma dada conjetura é correta. Também Hanna e Jahnke (1999) referem o facto de os matemáticos ficarem insatisfeitos com demonstrações que não providenciem qualquer explicação sobre os motivos por que é verdadeiro um dado teorema, mesmo que estabeleçam indubitavelmente a sua veracidade. Assim, a contribuição mais significativa da demonstração na prática dos matemáticos é a promoção da compreensão matemática (de Villiers, 2001; 2004; Hanna & Jahnke, 1999; Hanna, 2000). O que marca verdadeiramente a demonstração é a natureza conceptual com as suas qualidades reveladoras dos aspetos matemáticos principais da solução de um dado problema.

Para de Villiers (2001), a demonstração pode ser vista como um processo com múltiplas funções:

- *verificação/convencimento* (acerca da verdade de uma dada afirmação)
- *explicação* (acerca do motivo por que é verdadeira)
- *descoberta* (de novos resultados)
- *sistematização* (organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)
- *comunicação* (transmissão do conhecimento matemático)
- *desafio intelectual* (gratificação resultante da construção de uma demonstração).

Hanna (2000), além das funções enunciadas acima, acrescenta ainda as seguintes funções:

- *construção* (de uma teoria empírica)
- *exploração* (do significado de uma definição ou das consequências de uma assunção)
- *incorporação* (de um facto conhecido num novo quadro e visão do mesmo numa nova perspetiva).

Hanna (2000) e de Villiers (2004) discutem também a importância da demonstração no currículo de Matemática, considerando que, embora sendo atividades distintas, quer a exploração quer a demonstração são complementares e cada uma reforça a outra. Se a exploração de um problema permite alcançar a sua estrutura e as suas ramificações, será a demonstração que poderá conduzir a uma compreensão explícita de todas as suas ligações.

Do ponto de vista epistemológico da natureza da matemática, será importante que os alunos compreendam que a certeza dos resultados matemáticos só é alcançada através da demonstração (Balacheff, 2010; Jahnke, 2010). Os alunos, em todos os níveis de ensino, devem ser consciencializados desta diferença fundamental entre a matemática e as outras ciências: enquanto a ciência é baseada, em geral, nas suas asserções empíricas, as regularidades encontradas em matemática não constituem uma prova (Balacheff, 2010; de Villiers, 2004).

No entanto, este facto pode ser portador de alguns equívocos como o de se supor que os alunos, à partida, têm esta conceção de demonstração e da natureza da matemática. A clarificação, junto dos alunos, da interação entre a experimentação e a dedução e a relação entre a matemática e o mundo real constitui um dos grandes desafios dos educadores matemáticos (de Villiers, 2010; Hanna, 2000).

Segundo Hanna (2000), deve ser preocupação de qualquer professor discutir com os alunos o papel da demonstração em matemática, salientando quer a sua importância quer as suas limitações. Refere ainda que as múltiplas funções da demonstração em matemática emergem como produto de um longo desenvolvimento histórico e que no contexto de sala de aula, os alunos começam por lidar com a demonstração nas suas duas funções essenciais: verificação e explicação. No entanto, é à segunda função que a autora confere uma importância primordial, visão partilhada por outros autores (Balacheff, 2010; Herbst & Balacheff, 2009; Hersh, 1997). Assim, segundo esta perspetiva, a principal função da demonstração, na sala de aula, é a promoção da compreensão matemática. No entanto, os professores, em geral, apenas reconhecem a função verificativa da prova (Harel & Sowder, 2007). Hersh (1997) distingue claramente o papel da demonstração na investigação matemática (o de convencer) do papel da demonstração na sala de aula (o de explicar). Este autor argumenta que, no contexto da aula de Matemática, os alunos ficam facilmente convencidos e que não precisam da demonstração para esse efeito; precisam dela para explicar e compreender por que é que um teorema é verdadeiro.

Metodologia

O estudo foi conduzido sob o paradigma de investigação interpretativo, sendo de tipo qualitativo, e como tal, teve como propósito central a compreensão do fenómeno, a partir das perspetivas dos participantes envolvidos. O foco central deste tipo de investigação reside na interpretação de significados de ações locais e de processos decorridos em situações específicas (Erickson, 1986). A investigadora ficou imersa no fenómeno em estudo de modo a conseguir apresentar as definições da situação desses mesmos participantes (Bogdan & Biklen, 1991/1994), tendo recolhido os dados no contexto natural dos participantes: as aulas de Matemática.

A natureza interpretativa da metodologia adotada no estudo adequou-se à problemática investigada, tendo-se procurado atender à complexidade do fenómeno de validação do conhecimento por parte dos alunos, equacionando todos os seus componentes — natureza da validação, o papel da demonstração na aula de Matemática e a prática social — de uma forma holística já que todos eles se influenciam reciprocamente. A abordagem qualitativa adequa-se às investigações em que os componentes do fenómeno não podem ser estudados isoladamente (Merriam, 1991).

Os participantes no estudo foram uma turma de 9.º ano e a respetiva professora de Matemática. Os dados foram recolhidos nas aulas de Matemática, durante um ano letivo. A professora usava, frequentemente, nas suas aulas, a modalidade de trabalho de grupo, pelo que a formação dos grupos foi feita no início do ano letivo, tendo a escolha da sua composição sido da responsabilidade dos alunos e mantida em todo o ano. De entre esses grupos de quatro alunos, foi selecionado um grupo cujo trabalho na aula de Matemática foi alvo de videogravação. O critério de seleção do grupo foi o de ser um grupo caracterizado por os seus elementos, habitualmente, discutirem, entre si, as suas ideias, para facilitar o acesso às suas formas de raciocinar e ao modo como as mesmas evoluem em interação com os colegas. Com o objetivo de observar o princípio ético de anonimato dos alunos participantes no estudo, foram usados pseudónimos para os alunos do grupo-alvo selecionado e foi obtido consentimento informado de todos os intervenientes.

Foi utilizada a triangulação metodológica, tendo sido utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevistas semiestruturadas videogravadas à professora e a cada um dos elementos do grupo-alvo e realizadas no final do ano letivo, observação participante e naturalista, e análise de documentos. As entrevistas foram usadas para se aceder às perspetivas dos participantes, não captáveis pela observação direta (Patton, 2002), com o propósito de recolher dados relativos às suas perspetivas pessoais sobre diversos domínios, incluindo a forma como os mesmos encaravam, no final do ano letivo, a demonstração na aula de Matemática. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos áudio e vídeo, (b) as notas de campo, e (c) os trabalhos de todos os alunos da turma.

Tanto a teoria como as questões impulsionadoras do estudo orientaram os processos de recolha e análise de dados (Erickson, 1986; Merriam, 1991), tendo existido uma interação entre a dedução e a indução. No âmbito da análise de dados, os dados foram organizados por tipo de material semelhante (Bogdan & Biklen, 1991/1994) e procedeu-se a uma redução dos dados. As categorias analíticas foram essencialmente sugeridas pelas questões da investigação, e definidas, antecipadamente, com base na revisão da literatura, mas foram também geradas interativamente pelos dados, tomando assim uma especificidade descritiva dos mesmos. No âmbito do presente artigo, são consideradas as seguintes categorias: (a) esquemas demonstrativos usados pelos alunos, (b) natureza da demonstração (forma algébrica ou narrativa), e (c) funções da demonstração. Procurou-se, ainda, criar relações entre as categorias analíticas na procura da compreensão global do fenómeno em estudo, em clara articulação com os conceitos teóricos.

Apresentação de resultados

Nesta secção, serão apresentadas e analisadas duas situações empíricas, a primeira das quais envolvendo o estabelecimento de conjeturas por parte dos alunos, e a segunda caracterizada pela ausência de conjeturação.

Tarefa *Investigações com espelhos*

Esta situação incide no trabalho dos alunos face a uma tarefa em que era pedido, além de outras questões, o traçado dos eixos de simetria em polígonos regulares, tendo espelhos como recurso. Apesar de disporem de espelhos, estes foram usados uma única vez para traçar o primeiro eixo do triângulo, sendo que o espelho foi colocado no sítio exato do eixo, tendo, pois, servido como confirmação e não como descoberta da respetiva localização. Os restantes eixos, quer do triângulo quer dos outros polígonos, foram traçados sem qualquer auxílio do espelho. O grupo-alvo foi preenchendo a tabela (figura 1) à medida que ia fazendo o traçado dos eixos.

Fig. 1. Parte do enunciado da tarefa

a) Descubram todos os eixos de simetria de cada polígono. (Experimentem e registem).

N.º de lados do polígono regular	3	4	5	6	7	8	...	n
N.º de eixos de simetria							...	

b) Observando a tabela que preencheram, a que conclusões podem chegar?

c) Em cada um dos polígonos regulares, expliquem como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados. (Por onde passam os eixos?)

Após o preenchimento da tabela para os casos do triângulo e do quadrado, a Sara formulou uma conjetura oralmente: "Estou a ver que o número de lados e o número de eixos vai ser sempre igual". Apesar da verificação desta relação apenas para dois casos, a mesma foi logo generalizada para todos os polígonos regulares e confirmada, depois, com o traçado concreto dos eixos nos polígonos até oito lados.

Para os estudantes, a conjetura formulada assumiu um caráter validativo. Nesta fase de trabalho, eles acreditavam na sua veracidade mas não compreendiam a razão justificativa dessa relação. Foi a pretensão de dar resposta à alínea c) que fez com que passassem do esquema demonstrativo empírico indutivo inicial para o esquema demonstrativo dedutivo transformativo. Quando se preparavam para responder a esta questão, a professora interagiu com o grupo.

> Ricardo- Então, é aqui que eu tava [sic] a dizer que era a mediatriz.
> Professora- Vá… E são todas? Todas elas têm aquela posição que a gente tava [sic] ali a referir? Todos os eixos…
> Ricardo- Todos os eixos vértice-lado…
> Professora- (...) Mas a questão que se põe aqui é: será que a posição dos eixos de simetria é sempre a mesma, não é verdade? (...) (*aponta para o triângulo*) (...) (*aponta agora com a régua para o quadrado*) Pronto, agora aqui, no quadrado, no quadrilátero.
> Ricardo- (*intervindo de forma imediata*) Lado com lado. Vértice com vértice. (...) Stora, então os ímpares é vértice-lado e os pares vértice-vértice, lado-lado.
> Professora- Então, vamos lá!... Estás a pensar numa teoria, não é? Então, vamos lá a ver se essa teoria tem sentido. Vamos lá verificar. Vamos lá! Pronto. (*afasta-se*)

A alusão do Ricardo à mediatriz evidencia a transposição que ele fez das propriedades conhecidas e apropriadas da mediatriz para os eixos de simetria dos polígonos: os eixos passam pelo ponto médio dos lados dos polígonos, sendo perpendiculares aos mesmos. A consciência do diferente modo como os eixos atravessam os polígonos regulares consoante o seu número de lados é par ou ímpar só emergiu no decurso do diálogo travado com a professora quando a mesma focou a atenção dos alunos para esse aspeto, apontando para polígonos concretos. A reflexão associada à experimentação é essencial para que ocorra a aprendizagem matemática. Neste caso, o questionamento conduzido pela professora levou os elementos do grupo a reparar em aspetos a que não prestaram atenção aquando do traçado dos eixos. Após a observação dos casos concretos, o Ricardo procedeu a uma generalização para quaisquer polígonos regulares--"os ímpares é vértice-lado e os pares vértice-vértice, lado-lado"--valorizada pela professora quando a designou por teoria.

Um pouco depois, foi a investigadora que se aproximou do grupo, tendo incentivado o grupo a relacionar as duas regularidades identificadas, a igualdade numérica entre lados e eixos, e o modo diferenciado de localização dos eixos: "Agora tentem explicar, com base nisso, com base que passa de uma maneira para os ímpares e de outra maneira prós [sic] pares, porque é que é sempre o mesmo número". Após este pedido, os alunos enveredaram pela construção de um esquema demonstrativo dedutivo, embora com uma natureza informal e narrativa. Apresenta-se, em seguida, mais um extrato alusivo a um momento de interação do grupo com a professora:

> Professora- O que é que vocês pretendem explicar?
> Ricardo- O número de eixos.
> Professora- A quantia? (*apontando para o quadrado*) Quantos são ali os que passam lado-lado?
> Alunos- Dois.
> Professora- Como é esse número em relação ao número de lados?
> Maria- Quatro.
> Ricardo- Ah! É metade!
> Professora- E os que unem os vértices opostos?
> Ricardo- Também dois.
> Professora- (*olhando para o Ricardo*) Agora verifica se essa teoria… Estás a verificar essa hipótese (*aponta primeiro para o quadrado e depois para o hexágono e o octógono*) a relacionar com outros, com o de seis, com o de oito lados. (*afasta-se*)

Assim que a professora se afastou, o Ricardo começou logo a escrever na sua ficha e os restantes elementos do grupo espreitaram o seu registo para responder o mesmo:

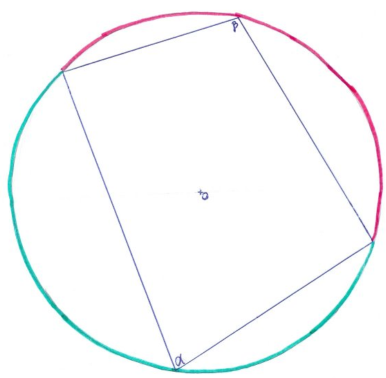
> Nos polígonos regulares, os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados é que:
> Ímpares- os eixos de simetria passam de vértice-lado, tendo por isso o mesmo nº de eixos de simetria quanto ao nº de vértices.
> Pares- os eixos de simetria passam de lado-lado e vértice-vértice tendo por isso metade de eixos de simetria do que a soma de vértices com os lados.

No caso dos polígonos com número ímpar de lados, os alunos explicitam a relação de igualdade entre o número de eixos e o número de vértices, apesar da tabela referir os lados e não os vértices. Assim, os alunos evidenciam que assumem implicitamente existirem sempre tantos lados quantos os vértices em qualquer polígono. No caso dos polígonos com número par de lados, poder-se-ia traduzir a expressão narrativa usada pelo grupo por um argumento algébrico conciso e formal: $\frac{2n}{2} = n$. Como por cada par de vértices só passa um eixo de simetria (metade) e por cada par de lados, só passa um eixo de simetria (metade), à soma $2n$ corresponde metade de eixos de simetria. O que o seu registo deixa omisso, ou subentendido, é que a metade de $2n$ é n, de modo a estabelecer, de forma dedutiva e fundamentada, a relação de igualdade enunciada na alínea anterior, ainda sob a forma de conjetura. Esta omissão evidencia que a construção da demonstração teve, para os alunos, unicamente a função de explicar a razão por que era verdadeira a relação de igualdade. A conjetura foi encarada, sempre, como uma verdade conclusiva. Logo, os alunos não sentiram necessidade de verificar, pela dedução, uma verdade acerca da qual já estavam convictos.

Tarefa *Circunferência e ângulos*

Face à tarefa, a realizar com papel e lápis, "Construam um quadrilátero inscrito numa circunferência (todos os seus vértices pertencem à circunferência). O que poderão dizer acerca da soma das amplitudes dos ângulos opostos desse quadrilátero?", o grupo-alvo fez a seguinte construção (os arcos só foram pintados posteriormente):

Fig. 2. Quadrilátero inscrito na circunferência



No grupo, o Ricardo verbalizou a relação entre as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Segue-se o extrato transcrito deste momento do trabalho do grupo:

> Ricardo- Ângulo… Ângulo ao centro… (*aponta para a folha de papel*) É vértice aqui. (*a Maria aponta também*)
> Sara- (*impercetível*)
> Ricardo- Deixa-me... (*leva as mãos à cabeça*) Deixa-me pensar.
> Sara- Não tem nada a ver.
> Ricardo- Tem! Tem!
> Sara- Como? Explica.
> Ricardo- Lembra-te que o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro. Então…

A construção assume, desde o início, um caráter genérico, representativa de quaisquer quadriláteros inscritos numa circunferência, nunca tendo sido encarada pelos alunos como um exemplo específico. Assim, nenhum elemento do grupo se lembrou de usar o transferidor e medir aqueles ângulos específicos nem sugeriu a experimentação por meio da construção de outros quadriláteros naquelas condições, com vista a verificar a relação existente em casos concretos específicos e a generalizar, depois, indutivamente. A sua abordagem ao problema é de natureza teórica: procuraram uma propriedade matemática que lhes facultasse a solução para a generalidade dos quadriláteros cíclicos. Não adotaram, pois, um esquema demonstrativo empírico. Vejamos o extrato seguinte:

> Maria- Não percebi nada.
> Ricardo- Dá-me uma régua. Preciso de uma régua! (*traça na folha o diâmetro da circunferência com o auxílio da régua*)
> Sara- O que é que estás a fazer, Silva?
> Ricardo- Pensa. Ângulo ao centro… (*passa com os dedos por cima do traçado da circunferência*) 360, certo? O ângulo inscrito… O ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro.
> Sara (*fazendo coro com o Ricardo*)- sempre metade desse ângulo ao centro.
> Ricardo (*falando diretamente para a Sara e apontando no papel para os pontos da circunferência intersetados pelos ângulos inscritos*)- Então, daqui até aqui é 90. Daqui para aqui é 90. 90 mais 90 é 180. Percebeste?
> Sara- Não.
> Ricardo- Então, descobrimos que a soma dos ângulos opostos é sempre 180.
> Sara- Não.
> Ricardo- Tou [sic] a brincar. Não é assim.
> (…)
> Sara- Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho, para ser 90º (*traça no papel com o lápis*), tinha de estar aqui.
> Ricardo- (*falando ao mesmo tempo que a Sara*) Ya. Eu sei.

O facto de o Ricardo ter traçado o diâmetro como representação de ângulo ao centro (não visível na figura pois foi apagado posteriormente) levou-o a concluir que cada ângulo inscrito mediria metade desse valor, ou seja, 90º. Ao ser contestado pela Sara, o Ricardo deu-lhe razão. A justificação, enunciada pela Sara, fundamenta-se na perceção das amplitudes dos ângulos inscritos: "Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho, para ser 90º, tinha de estar aqui." (esquema demonstrativo empírico percetivo). Assim, apesar de o Ricardo ter visto que a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro seria 360º, ninguém, no grupo, conseguiu estabelecer a conclusão dedutiva da relação enunciada inicialmente. A assunção errada de ângulo ao centro correspondente a ângulo inscrito fez com que o raciocínio do Ricardo se focasse, depois, na amplitude particular de um ângulo ao centro e não na soma das suas amplitudes.

O Bernardo decidiu chamar a professora que os orientou para as amplitudes dos arcos. Assim que o Bernardo assinalou as extremidades dos arcos, o Ricardo exclamou "Já sei!" e a professora olhou e sorriu para ele. A Maria fez o registo diferenciado dos arcos, pintando-os de cores diferentes. Aquela exclamação do Ricardo manifesta o *insight* que teve nesse momento, ao relacionar a soma das amplitudes dos dois ângulos inscritos correspondentes aos arcos com a soma das amplitudes dos dois arcos. Enquanto com os ângulos ao centro, acabou por ignorar a sua soma, por assumir que conhecia a amplitude particular de cada um, desta vez raciocinou com a soma, por desconhecer a amplitude de cada um dos arcos. No momento seguinte, o Ricardo, apesar de o seu raciocínio se ter desenvolvido com base em relações gerais, usou exemplos na explicação que fez aos colegas com o intuito de os mesmos perceberem a relação em causa e generalizarem depois para qualquer ângulo: "faz de conta que aqui é 100, este aqui é 260. (...) Isto é o ângulo inscrito. O arco do ângulo inscrito é sempre o dobro. (...) 130 mais 50 dá 180. Logo, é 180. Seja qual for". No entanto, o entendimento da relação dedutiva encontrada pelo Ricardo só foi cabalmente conseguido com nova intervenção nesse sentido da professora, ao chamar a atenção para a soma dos dois arcos. No final, o grupo redigiu a resposta à questão colocada na tarefa:

> Todos os ângulos opostos dos quadriláteros inscritos numa circunferência somados dão 180º, pois os arcos correspondentes aos ângulos inscritos de cada vértice dão sempre 360º, logo a soma dos dois ângulos inscritos é metade da soma dos seus arcos correspondentes, logo dão sempre 180º.

A sua resposta encerra uma demonstração narrativa e informal com múltiplas funções: verificação, explicação, descoberta e comunicação. A demonstração permitiu descobrir uma dada propriedade matemática — a da soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência — estabelecendo a respetiva veracidade e explicando a razão por que é a mesma verdadeira, simultaneamente. Por outro lado, foi por meio dela que os alunos comunicaram, por escrito, a descoberta dessa nova propriedade, usando um discurso narrativo habitual na sua forma de comunicar os raciocínios desenvolvidos na aula de Matemática. Neste caso, a convicção não foi obtida pela testagem em diversos exemplos particulares e os alunos não chegaram a estabelecer qualquer conjetura, já que o quadrilátero foi encarado de um ponto de vista geral e teórico, sem atender às suas características específicas.

A concluir

Os resultados atrás discutidos permitem concluir acerca do papel que as funções da demonstração podem assumir no desenvolvimento dos esquemas demonstrativos dos alunos. Nas situações caracterizadas pela existência de uma fase de conjeturação, os alunos adotam inicialmente esquemas demonstrativos empíricos, já que as suas conjeturas são apoiadas pela verificação nalguns exemplos, não sentindo necessidade de proceder à sua validação. Assim, as conjeturas são encaradas como conclusões verdadeiras sobre as quais não têm dúvidas. Ao serem incentivados pela professora a explicar a razão por que se verifica uma dada propriedade matemática, expressa na conjetura, os alunos enveredam pela elaboração de esquemas demonstrativos dedutivos com a única função de explicar por que é verdadeira a conjetura, formulada antes com base em exemplos específicos. Ou seja, a função explicativa da demonstração constitui o motor da atividade matemática dos alunos, fazendo-os evoluir de um patamar mais rudimentar, circunscrito a exemplos particulares, para um patamar de maior sofisticação matemática, alcançando um nível superior de compreensão matemática, sustentada pela fundamentação teórica alusiva a entes matemáticos gerais. Estas situações caracterizam-se pela existência de fases: inicialmente, a conjeturação coincide com a verificação feita por meio de esquemas demonstrativos empíricos; a segunda fase alcança a compreensão dos fenómenos matemáticos por meio de esquemas demonstrativos dedutivos, elaborados com a função explicativa. Tal como defendido por vários autores (Hanna, 2000; Hersh, 1997), no contexto escolar, os alunos ficam facilmente convencidos, precisando da demonstração, não para estabelecer ou verificar a veracidade dos resultados matemáticos, mas sim para explicar e compreender por que é que os mesmos são verdadeiros.

Nas situações caracterizadas pela ausência de conjeturação, a descoberta da solução da tarefa constitui, simultaneamente, o processo de elaboração de esquemas demonstrativos dedutivos e o meio de produção de novo conhecimento, sendo que os alunos lidam, desde o início, com objetos matemáticos gerais, procurando nos mesmos propriedades teóricas justificativas dos fenómenos matemáticos, e ignorando os seus aspetos particulares e específicos. Dada a ausência de conjeturação, e o desconhecimento da propriedade a descobrir e a demonstrar, estes esquemas demonstrativos dedutivos transformativos são, nestas circunstâncias, desprovidos de qualquer antecipação. Isto é, são esquemas que se caracterizam pela generalidade e inferência lógica, não possuindo, todavia, a característica do pensamento operacional, tal como descrito por Harel e Sowder (2007). Nestas situações, a função de descoberta da demonstração é o motor da atividade dos alunos, conduzindo-os à elaboração de esquemas demonstrativos dedutivos com múltiplas e simultâneas funções: descoberta, verificação, explicação e comunicação. Uma vez que todo o trabalho exploratório se baseia em relações teóricas e gerais, os alunos não chegam a estabelecer conjeturas fundadas em exemplos empíricos, sendo por meio da demonstração que conseguem descobrir as propriedades e, ao mesmo tempo, verificá-las quanto à sua veracidade para a generalidade dos casos, bem como explicá-las e compreendê-las.

Em suma, se nas situações com conjeturação pelos alunos, é a função explicativa da demonstração que assume um papel fundamental na evolução dos estudantes, nas situações em que os alunos não chegam a conjeturar, é a função de descoberta que assume um papel essencial, embora esta função se concretize em simultaneidade com uma multiplicidade de outras funções.

Referências

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Chazan, D., & Lueke, M. (2009). Exploring relationships between disciplinary knowledge and school mathematics: Implications for understanding the place of reasoning and proof in school mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton e E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 21-39). New York: Routledge.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science,* 397-418.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). Haifa: Israel Institute of Technology.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. In D. Stylianou, M. Blanton e E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40-63). New York: Routledge.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 17-32). New York: Springer.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Thousand Oaks: Sage.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.